CÁLCULO VECTORIAL

TERCERA EDICIÓN

DE JERROLD E. MARSDEN Y ANTONY J. TROMBA

KAREN PAO
FREDERICK SOON

PROBLEMAS RESUELTOS

ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA

CALCULO VECTORIAL

PROBLEMAS RESUELTOS

TERCERA EDICIÓN

DE JERROLD E. MARSDEN Y ANTHONY J. TROMBA

PREPARADO POR **KAREN PAO Y FREDERICK SOON**

Versión en español de

Constancio Hernández García

Universidad Autónoma Metropolitana,

Unidad Iztapalapa, México

*TODO LO QUE QUIERES SABER PARA HACER LA TAREA

ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA

Argentina • Brasil • Chile • Colombia • Ecuador • España

Estados Unidos • México • Perú • Puerto Rico • Venezuela

Versión en español de la obra *Study Guide for Vector Calculus, Third Edition, by Jerrold E. Marsden and Anthony J. Tromba, prepared by Karen Pao and Frederick Soon,* publicada originalmente en inglés por W. H. Freeman and Company, E.U.A. O 1988 por W. H. Freeman and Company.

Esta edición en español es la única autorizada.

Imagen generada por computador de la superficie mínima de Enneper. La imagen fue creada por James T. Hoffman en la University of Massachusetts, Amherst, con las instalaciones del Geometry Analysis Numerics and Graphics Group. Copyright 1986 por James T. Hoffman.

ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA
Malabia 2363-2ºG, Buenos Aires 1425, Argentina
Ave. Brigadeiro Luis Antonio 2344, Conjunto 114,
São Paulo 01402, Sáo Paulo, Brasil
Casilla 70060, Santiago 7, Chile
Apartado Aéreo 741-943, Santa Fé de Bogotá, Colombia
Espalter 3 bajo, Madrid 78014. España
7 Jacob Way, Reading, Massachusetts 01867, E.U.A.
Apartado Postal 22-012, México, D.F. 14000, Mfxico
Apartado Postal 79853, Río Piedras, Puerto Rico 00939
Apartado Postal 51454, Caracas 1050-A, Venezuela

Impreso en Estados Unidos. *Printed in U.S.A.*

ISBN 0-201-62564-4

2 3 4 5 6 7 8 9 10-CRS-97 96 95 94

ÍNDICE GENERAL

CÓMO USAR ESTE LIBRO

El propósito de esta guía de estudio es ayudar a entender el cálculo vectorial. Hemos organizado los capítulos y secciones de manera que correspondan al libro *Cálculo* vectorial de Marsden y Tromba, tercera edición. Cada sección contiene objetivos, recomendaciones para el estudio y (lo más importante) soluciones de los ejercicios seleccionados. Además, hemos escrito cuatro ejemplos de exámenes.

Los objetivos son un resumen corto de lo que debes aprender en cada sección y de lo que debes entender antes de pasar a la siguiente. Los objetivos también deberían ayudarte a repasar para los exámenes.

Las recomendaciones para el estudio son definiciones y hechos que debes tener presentes cuando hagas las tareas. También contienen advertencias sobre los errores más comunes.

En las soluciones hemos elegido algunos ejercicios y se han trabajado. Algunas veces te pedimos que verifiques algo o que completes algún detalle, pero la mayoría de nuestras soluciones son tan completas como es posible. Sin embargo, no trabajamos los problemas de modo que los puedas copiar y presentarlos como tu trabajo. Eso es trampa. Nosotros (así como tus profesores) pensamos que las matemáticas no son un deporte para expectadores. Para entender qué pasa debes hacer ejercicios. Si te has perdido (o te has dormido en clase, como alguno de nosotros siempre hizo), trabajar sobre las soluciones detalladas puede ayudarte a encontrar el camino de regreso. Si te sientes inseguro antes de los exámenes, la mejor manera de estudiar es hacer ejercicios y problemas adicionales y comparar tus respuestas con las nuestras. Si eres estudioso y quieres hacer ejercicios adicionales, no tienes por qué hacerlos a ciegas ya que hemos proporcionado muchas soluciones.

Aun si sólo hojeas nuestro pequeño libro diez minutos antes del examen, ¡debes sentirte más seguro respecto al cálculo vectorial!

Te deseamos mucho éxito.

AGRADECIMIENTOS

Deseamos agradecer a los profesores Marsden y Tromba que nos dieran la oportunidad de escribir este libro. Damos las gracias de manera muy especial al profesor Marsden, quien nos permitió usar su Macintosh Plus y todos los programas y accesorios necesarios, leyó meticulosamente el manuscrito e hizo muchas correcciones y sugerencias valiosas. También queremos agradecer a Andrew Hwang, quien proporcionó muchas de las soluciones y a Sean Bates por sus contribuciones.

Karen Pao
Frederick Soon

CAPÍTULO 1
LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO EUCLIDIANO

1.1 Vectores en el espacio tridimensional

OBJETIVOS

1. Poder realizar las siguientes operaciones con vectores: suma, resta y multiplicación por un escalar.

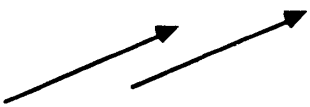
2. Dados un vector y un punto, saber encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto y que tiene la misma dirección del vector.

3. Dados dos puntos, encontrar la ecuación de la recta que pasa a través de éstos.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. Notación sobre espacios. El símbolo R o $\mathbf{R}^1$ representa al conjunto de todos los puntos de la recta real o a un espacio de dimensión 1. $\mathbf{R}^2$ es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) que están en el plano, un espacio de dimensión 2. $\mathbf{R}^3$ representa al conjunto de todas las ternas ordenadas (x, y, z) que están en un espacio de dimensión 3. En general, el "exponente" en $\mathbf{R}^n$ indica cuántas componentes tiene cada vector.

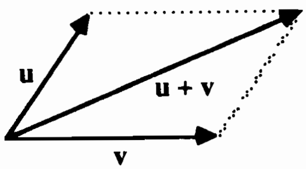
2. Vectores y escalnres. Un vector tiene longitud (magnitud) y dirección. Los escalares son sólo números. Los escalares no tienen dirección. Dos vectores son iguales si y sólo si tienen la misma longitud y dirección. Sus gráficas no necesitan partir del mismo punto. Los vectores de la figura son iguales.

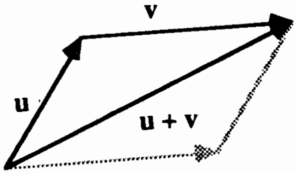


3. Notación vectorial. Un vector se denota a menudo con letra negrilla, letra subrayada, una flecha sobre la letra, o con n-adas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. El elemento x_i de la n-ada se llama i-ésima componente. *¡OJO!*, la n-ada puede representar un punto o

un vector. El vector $(0, 0, \ldots, 0)$ se denota con $\mathbf{0}$. El profesor u otros libros de texto pueden usar otras notaciones, como una línea ondulada (~) debajo de la letra. En ocasiones se usa un acento circunflejo (^) sobre la letra para representar vectores *unitarios.*

4. *Suma de vectores.* Los vectores se suman componente a componente, por ejemplo, en $\mathbf{R}^2$

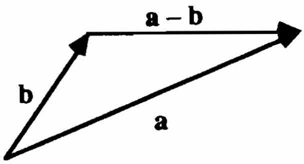




$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Dos vectores se pueden concebir gráficamente como lados de un paralelogramo. Si partimos de vértice formado por los dos vectores, formamos un nuevo vector que termina en la esquina opuesta del paralelogramo. Este nuevo vector es la suma de los dos primeros. De otra forma, se puede trasladar $\mathbf{v}$ de manera que su extremo inicial coincida con el extremo final de $\mathbf{u}$. El vector que une el extremo inicial de $\mathbf{u}$ con el extremo final de $\mathbf{v}$ es $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

5. *Resta de vectores.* De la misma manera que en la suma, los vectores se restan componente a componente. Debes pensar en la resta como la suma del negativo de un vector. Los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ forman un triángulo. Para determinar la dirección correcta debes sumar $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ a $\mathbf{b}$ y obtener $\mathbf{a}$. Entonces $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ va del extremo final de $\mathbf{b}$ al extremo inicial de $\mathbf{a}$.



6. *Multiplicación por un escalar.* En este caso cada componente de un vector se multiplica por el mismo escalar, por ejemplo, en $\mathbf{R}^2$

$$r(x, y) = (rx, ry) \qquad \text{para cualquier número } r.$$

El efecto de multiplicar por un escalar positivo es cambiar la longitud por un factor. Si el factor es negativo el cambio de longitud se produce en dirección opuesta. La multiplicación de vectores se estudiará en las dos secciones siguientes.

7. *Base estándar.* Hay vectores cuyas componentes son todas 0, excepto una que vale 1. En $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ denotan vectores que están en los ejes x, y y z. Son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, respectivamente. La base estándar consta de los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, los cuales están en los ejes x y y, y sus respectivas componentes son $(1, 0)$ y $(0, 1)$. En algunas ocasiones, estos vectores se denotan con $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ y $\mathbf{e}_z$ o $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$.

8. Rectas. (a) La recta que pasa por a en la dirección de v es $\mathbf{l}(t) = a + tv$. Ésta se llama forma punto-dirección de la ecuación de la recta porque la única información necesaria es el punto a y la dirección v.
(b) La recta que pasa por a y b es $\mathbf{l}(t) = a + t(b - a)$. Ésta se llama forma punto-punto de la ecuación de la recta. Para ver si la dirección es correcta, debes hacer $t = 0$ y obtener el primer punto. Haz $t = 1$ y obtén el segundo punto.

9. *Conjunto* de generadores de *un* espacio. Si todos los puntos de un espacio se pueden escribir de la forma $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n$, donde λ_i son escalares, entonces los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots,$ v„ generan el espacio dado. Por ejemplo, los vectores **i** y j generan al plano xy.

10. *Demostraciones* geométricas. Una demostración se puede simplificar con el uso de vectores. Trata de comparar los métodos vectoriales con los no vectoriales haciendo el ejemplo 7 sin vectores.

11. Resolirción *de problemas.* Como los vectores tienen magnitud y dirección, se pueden representar gráficamente. Por lo tanto, con frecuencia es útil hacer un diagrama con objeto de visualizar un problema vectorial.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

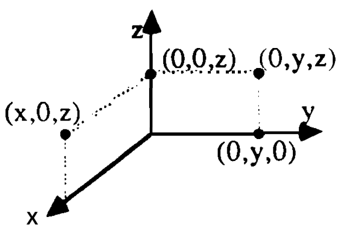
1. Debemos resolver las ecuaciones siguientes:

$$-21 - x = -25$$
$$23 - 6 = y$$

Obtenemos $x = 4$ y $y = 17$, de manera que $(-21, 23) - (4, 6) = (-25, 17)$.

4. Convertimos $-4i + 3j$ en $(-4, 3, 0)$, de manera que

$$(2, 3, 5) - 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = (2, 3, 5) + (-4, 3, 0) = (-2, 6, 5).$$



En el eje y los puntos tienen coordenadas de la forma (O, y, O), por lo tanto, debemos restringir los valores de x y z a 0.
En el eje z los puntos tienen coordenadas de la forma (O, 0, z), por lo tanto, debemos restringir los valores de x y y a O.
En el plano xz los puntos tienen coordenadas de la forma (x, 0, z), Por lo tanto, debemos restringir el valor de y a 0.

En el plano yz los puntos tienen coordenadas de la forma $(0, y, z)$, por lo tanto, debemos restringir el valor de x a 0.

12. Todo punto del plano generado por los vectores dados se puede escribir de la forma $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$. Donde a y b son números reales; por consiguiente, el plano se describe con

$$a(3, -1, 1) + b(0, 3, 4).$$

15. Dados dos puntos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, la recta que pasa por ellos es $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. En este caso, obtenemos

$$\mathbf{l}(t) = (-1, -1, -1) + t(2, 0, 3) = (2t - 1, -1, 3t - 1).$$

19. Sustituimos $\mathbf{v} = (x, y, z) = (2+t, -2+t, -1+t)$ en la ecuación que está en términos de x, y y z y obtenemos

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z - 2 &= 2(2+t) - 3(-2+t) + (-1+t) - 2 \\ &= 4 + 2t + 6 - 3t - 1 + t - 2 = 7. \end{aligned}$$

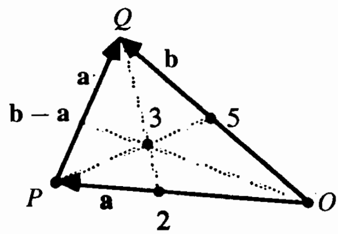
Como $7 \neq 0$, no hay puntos (x, y, z) que satisfagan la ecuación y estén en la recta.

21. Representemos los lados del triángulo con los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ como se muestra en la figura. Primero calculamos el punto situado en la mediana que va del punto Q al punto medio del segmento OP y que divide a dicha mediana en una razón 2 : 1

$$\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\left[\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}\right] = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} - \frac{1}{6}\mathbf{a} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}.$$

Luego calculamos el punto situado en la mediana que va del punto P al punto medio del segmento OQ y que divide a dicha mediana en una razón 2 : 1

$$\frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\left[\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b}\right] = \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{6}\mathbf{b} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}.$$



Por último, calculamos el punto situado en la mediana que va del punto O al punto medio del segmento QP y que divide a dicha mediana en una razón 2 : 1

$$\frac{2}{3}\left[\mathbf{a}+\frac{1}{2}(b-\mathbf{a})\right]=\frac{2}{3}\mathbf{b}+\frac{2}{6}\mathbf{b}-\frac{2}{6}\mathbf{a}=\frac{1}{3}\mathbf{a}+\frac{1}{3}\mathbf{b}.$$

En vista de que los tres puntos son el mismo, concluimos que las tres medianas tienen el mismo punto de intersección y que éste divide a cada una en una razón de 2 : 1.

22. De la misma manera que el paralelogramo del ejemplo 4 se describió con $\mathbf{v} = s\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ para s y t en [0, 1], podemos describir el paralelepípedo con $\mathbf{w} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + r\mathbf{c}$ para s, t y r en [0, 1].

27. (a) Si nos fijamos en la componente x, el piloto necesita ir de 3 a 23. Su velocidad en la dirección x es la componente $\mathbf{i}$, 400 km/h. Por lo tanto,

$$\Delta t=\frac{\Delta d}{v}=\frac{23-3}{400}=\frac{1}{20}.$$

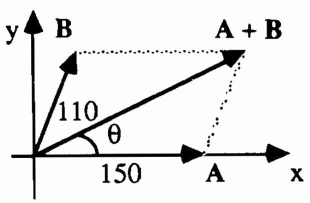
El piloto vuela sobre el aeropuerto $(1/20)$ horas o 3 minutos después. La misma respuesta se puede obtener analizando la componente y.

(b) Nos fijamos en la componente z y usamos la fórmula

$$\Delta d = v\Delta t, \qquad \text{es decir,} \quad h-5=(-1)\frac{1}{20}.$$

Si despejamos h, vemos que el piloto está a una altura de $(404/20)$ cuando pasa sobre el aeropuerto.

30. (a)



Es conveniente hacer un dibujo con A sobre el eje x.

(b) Del diagrama de la parte (a) obtenemos

$$\mathbf{A} = 150\mathbf{i} \qquad \mathbf{B} = (110\cos 60°)\mathbf{i} + (110 \operatorname{sen} 60°)\mathbf{j}.$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = (150 + 110\cos 60°)\mathbf{i} + (110 \operatorname{sen} 60°)\mathbf{j} = 205\mathbf{i} + 55\sqrt{3}\mathbf{j}.$$

El ángulo que $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ hace con $\mathbf{A}$ es

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{55\sqrt{3}}{205}\right)\approx\tan^{-1}(0.4647)\approx 25°$$

33. (a) Si usamos las coordenas (C, H, O), obtenemos

$$p(3,4,3)+q(0,0,2)=r(1,0,2)+s(0,2,1).$$

(b) Con objeto de encontrar la solución entera más pequeña para p, q, r y s, balanceamos las ecuaciones para las coordenadas C, H y O:

$$3p = r \qquad \text{(ecuación para } C\text{)}$$

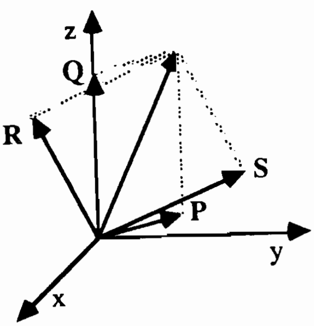
$$2s = 4p \quad \text{o} \quad s = 2p \qquad \text{(ecuación para } H\text{)}$$

$$2p + 3p = 2r + s = 6p + 2p \quad \text{o} \quad q = \frac{5}{2}p. \qquad \text{(ecuación para } O\text{)}$$

Sea $p = 2$, entonces la solución entera más pequeña es

$$p = 2, \qquad q = 5, \qquad r = 6, \qquad s = 4.$$

(c)



En el diagrama, **P** es $(6, 8, 6)$, **Q** es $(0, 0, 10)$, **R** es $(6, 0, 12)$ y **S** es $(0, 8, 4)$. Ambos lados de la ecuación dan como resultado el vector $(6, 8, 16)$.

1.2 Producto interno

OBJETIVOS

1. Poder calcular el producto interno.

2. Poder explicar el significado geométrico del producto interno.

3. Poder normalizar un vector.

4. Poder calcular la proyección de un vector sobre otro.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Producto interior.* También se conoce como producto punto y se denota con $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ o $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. El producto punto es la suma $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, donde a_i y b_i son la i-ésima

coordenada de **a** y **b**, respectivamente. Por ejemplo, en $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$. Advierte que el producto punto es un *escalar.*

2. *Longitud de un vector.* La longitud o norma de un vector (x, y, z) es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, se denota con $\|\mathbf{x}\|$ y es igual a $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^{1/2}$. Esto se puede deducir del hecho de que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ con $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

3. *Vectores unitarios.* Estos vectores tienen longitud 1. Puedes obtener un vector unitario de cualquier vector diferente de cero si lo normalizas. Para normalizar un vector, hay que dividirlo entre su longitud, es decir, hay que calcular $\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$.

4. *Desigualdad de Cauchy-Schwarz.* Conocer la desigualdad $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$ es lo más importante para hacer las demostraciones de las secciones opcionales de este texto y para cursos más avanzados.

5. *Propiedades geométricas importantes.* Conoce la igualdad $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre los dos vectores. Como consecuencia, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ implica que **a** y **b** son ortogonales. El vector cero es ortogonal a todos los vectores.

6. *Proyecciones.* La proyección de **b** sobre **a** es la “sombra” de **b** cuando cae sobre **a**. La proyección de **b** sobre **a** es un vector de longitud $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, que tiene la misma dirección que **a**, es decir, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. De la definición de producto punto, obtenemos:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{(0, 7, 19) \cdot (-2, -1, 0)}{\sqrt{7^2 + 19^2}\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{-7}{\sqrt{410}\sqrt{5}} \approx -0.1546.$$

Si utilizamos una calculadora de bolsillo obtenemos $\theta \approx 99°$.

7. Si $\mathbf{w} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, entonces $\|\mathbf{w}\| = [a^2 + b^2 + c^2]^{1/2}$, de manera que

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}; \qquad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}.$$

Si usamos la fórmula para el producto punto, obtenemos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(1) + (2)(-1) = -3.$$

10. Si usamos las fórmulas del ejercicio 7, obtenemos

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1 + 0 + 9} = \sqrt{10}; \qquad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{0 + 16 + 0} = 4.$$

Como $\mathbf{u}$ no tiene una componente $\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}$ no tiene componentes $\mathbf{i}$ o $\mathbf{k}$, los vectores son perpendiculares, en consecuencia, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

12. Un vector $\mathbf{w}$ se normaliza mediante la fórmula $\mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$. Para los vectores del ejercicio 7:

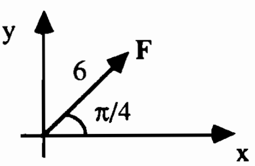
$$\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}); \qquad \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j}).$$

15. La proyección de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$ es

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} = \frac{(-1)(2) + (1)(1) + (1)(-3)}{1 + 1 + 1}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\frac{-4}{3}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

16. Por la ortogonalidad, queremos que el producto punto sea 0.
   (a) El producto punto es $(2\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \cdot (-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = -6 + 2b$, por lo tanto, b debe ser 3.
   (b) El producto punto es $(2\mathbf{i}+b\mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = 0$, por lo tanto, b puede ser cualquier número.

21. (a) Vemos geométricamente que la componente $\mathbf{i}$ de $\mathbf{F}$ es $\|\mathbf{F}\| \cos\theta$. De manera similar, la componente $\mathbf{j}$ de $\mathbf{F}$ es $\|\mathbf{F}\| \operatorname{sen}\theta$. Por consiguiente, $\mathbf{F} = \|\mathbf{F}\| \cos\theta\mathbf{i} + \|\mathbf{F}\| \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$, donde θ es el ángulo que forman $\mathbf{F}$ y el eje x. Como el ángulo que $\mathbf{F}$ forma con el eje y es $\pi/4$, θ también es $\pi/4$, por lo tanto, $\mathbf{F} = 3\sqrt{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$.



   (b) Calculamos $\mathbf{D} = 4\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, en consecuencia, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = (3\sqrt{2})(4)+(3\sqrt{2})(2) = 18\sqrt{2}$. Además, $\|\mathbf{F}\| = 6$ y $\|\mathbf{D}\| = \sqrt{20}$. De la definición de producto punto,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}}{\|\mathbf{F}\|\|\mathbf{D}\|} = \frac{18\sqrt{2}}{6\sqrt{20}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9487.$$

   Por lo tanto, $\theta \approx 18°$.
   (c) En la parte (b) calculamos $\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = 18\sqrt{2}$. Sabiendo que $\cos\theta = 3/\sqrt{10}$, también calculamos $\|\mathbf{F}\|\|\mathbf{D}\| \cos\theta = (6)\sqrt{20}(3\sqrt{10}) = 18\sqrt{2}$.

1.3 Producto cruz

OBJETIVOS

1. Poder calcular el producto cruz.
2. Poder explicar el significado geométrico del producto cruz.
3. Poder escribir la ecuación del plano a partir de información dada con respecto a puntos en el plano o normales al plano.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Matrices y determinantes.* Una matriz es un arreglo rectangular de números. El arreglo se escribe entre corchetes. El determinante de una matriz es un número; una matriz no tiene un valor numérico. El determinante sólo está definido para matrices cuadradas y se denota con barras verticales.

2. *Cálculo de determinantes.* Debes saber que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

   También que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

   Advierte el signo menos del segundo sumando del lado derecho. El método general para calcular un determinante se describe en el punto 3.

3. *Cálculo de determinantes de $n \times n$.* Usa el patrón que aparece en este punto, el cual comienza con signo más en la esquina superior izquierda. Elige cualquier columna o renglón; en general, aquella o aquel que contenga más ceros ahorra trabajo. Traza una recta vertical y otra horizontal que pasen por el primer número del renglón o columna elegidos. Los números que no están en estas rectas forman un determinante de $(n-1) \times (n-1)$ que se debe multiplicar por el número por el cual pasan las rectas (con el signo determinado por el patrón). Repite este proceso con todos los demás números de la columna o renglón elegidos. Por último, suma los resultados. Este proceso, llamado desarrollo por menores, funciona con cualquier columna o renglón. La mejor manera de memorizar el proceso es practicarlo. Asegúrate de usar el signo correcto.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & & & \vdots \end{vmatrix}$$

4. *Simplificación de determinantes.* El cálculo de determinantes se facilita cuando hay ceros. Sumar un renglón o columna a otro renglón o columna no altera el valor del determinante, pero puede simplificar los cálculos. Consulta el ejemplo 3.

5. *Cálculo de un producto cruz.* Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Debes notar que, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$. El producto cruz *no* es conmutativo. Además, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es un vector, *no* un escalar.

6. *Propiedades del producto cruz.* Los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ forman un sistema y la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ se determina con el método de la mano derecha (véase la Fig. 1.3.2). El producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es un vector ortogonal a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. La longitud de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es $\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Advierte que el producto cruz está relacionado con sen θ mientras que el producto punto está relacionado con $\cos\theta$.

7. *Más propiedades del producto cruz.* Si el producto cruz es cero, entonces: (i) la longitud de uno de ellos es cero, o (ii) sen $\theta = 0$, es decir, $\theta = 0$, de manera que los vectores deben ser paralelos.

8. *Geometría.* El valor absoluto del determinante
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$
es el área del paralelogramo generado por los vectores (a, b) y (c, d) que parten de un mismo punto. El valor absoluto del determinante
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$
es el volumen del paralelepípedo generado por los vectores (a, b, c), (d, e, f) y (g, h, i) que parten de un mismo punto. La longitud del producto cruz $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ es el área del paralelogramo generado por los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. El vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ nos da el vector normal al plano generado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

9. *Ecuación del plano.* Recuerda que la ecuación de un plano es $ax + by + cz + d = 0$. El vector (a, b, c) es ortogonal al plano. Si conocemos dos vectores en un plano, podemos determinar un vector ortogonal a éste usando el producto cruz. Estudia los métodos 1 y 2 del ejemplo 8.

10. *Distancia de un punto a un plano.* Debes entender la deducción de la ecuación del ejemplo 9. Revisa, si es necesario, las propiedades geométricas del producto punto en la sección 1.2.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

2. (b) Restamos 12 veces el tercer renglón al primero y restamos 15 veces el primer renglón al segundo. Luego desarrollamos a lo largo de la primera columna:
$$\begin{vmatrix} 36 & 18 & 17 \\ 45 & 24 & 20 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -42 & 41 \\ 0 & -51 & 50 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -42 & 41 \\ -51 & 50 \end{vmatrix}$$
$$= 3(-2100 + 2091) = -27.$$

5. El área del paralelogramo es $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$. Calculemos

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

y por tanto el área del paralelogramo es

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{9 + 1 + 25} = \sqrt{35}.$$

8. El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del determinante de 3×3 cuyos renglones son los vectores componentes. Desarrollamos a lo largo del primer renglón:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Por consiguiente, el volumen es 1.

11. Queremos encontrar el producto cruz y luego normalizarlo. Como $\mathbf{0}$ es ortogonal a cualquier vector, podemos ignorarlo. Calculemos:

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -5 & 9 & -4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 113\mathbf{i} + 17\mathbf{j} - 103\mathbf{k}.$$

De manera que

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{113^2 + 17^2 + 103^2} = \sqrt{23667}.$$

Hay dos vectores ortogonales en direcciones opuestas, que son $\pm\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\| = \pm(113\mathbf{i} + 17\mathbf{j} - 103\mathbf{k})/\sqrt{23667}$.

15. (a) La ecuación de un plano con vector normal (A, B, C) y que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) es $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. En este caso la ecuación es

$$1(x-1) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0 \qquad \text{o} \qquad x + y + z = 1.$$

(d) En este caso, el vector normal es paralelo a la recta, por lo tanto debe ser $(-1, -2, 3)$. Por tanto, la ecuación del plano es

$$-1(x-2) - 2(y-4) + 3(z+1) = 0 \qquad \text{o} \qquad -x - 2y + 3z + 13 = 0.$$

16. (b) Dos vectores que están en el plano que se pide en este problema son $\mathbf{v} = (0-1, 1-2, -2-0) = (-1, -1, -2)$ y $\mathbf{w} = (4-0, 0-1, 1+2) = (4, -1, 3)$.

El producto $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es ortogonal a ambos vectores y, por tanto, normal al plano que los contiene. Calculemos:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 5\mathbf{k},$$

entonces la ecuación es

$$-5(x-1) - 5(y-2) + 5(z-0) = 0 \qquad \text{o} \qquad -x - y + z + 3 = 0.$$

18. (a) Sea D la matriz con renglones $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, entonces

$$\det D = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Usa la siguiente propiedad de los determinantes: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$ corresponde al intercambio de dos renglones de la matriz D, entonces tenemos

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = (-1)(-1) \det D = \det D$$

y

$$\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (-1)(-1) \det D = \det D.$$

Para probar los otros tres, recuerda que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.

22. Una recta perpendicular a un plano es paralela a la normal de este plano, de manera que la ecuación de esta recta es

$$\mathbf{l}(t) = (1, -2, -3) + t(3, -1, -2).$$

25. Sea $\mathbf{u}$ el vector normal al plano. Entonces $\mathbf{u}$ es perpendicular a $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ porque la recta $\mathbf{v}$ está en el plano. El vector $\mathbf{u}$ es perpendicular a $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ porque el vector $A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es perpendicular a todos los vectores del plano $Ax + By + Cz = D$. Para encontrar $\mathbf{u}$ calculamos el producto cruz de $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$:

$$\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -10\mathbf{i} + 17\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Cuando $t = 0$, encontramos que un punto en el plano es $(-1, 1, 2)$, por lo tanto la ecuación del plano es

$$-10(x+1) + 17(y-1) - (z-2) = 0 \qquad \text{o} \qquad -10x + 17y + z + 25 = 0.$$

26. Primero encontramos la normal al plano. La normal al plano es perpendicular a la *recta* que pasa por $(3, 2, -1)$ y $(1, -1, 2)$. La ecuación de la recta $\mathbf{l}(t) =$

$(3, 2, -1) + t(2, 3, -3)$. La normal al plano también es perpendicular a la recta $\mathbf{v} = (1, -1, 0) + t(3, 2, -2)$. Por consiguiente, la normal es $(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = -5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Ahora necesitamos un punto en el plano, digamos $(3, 2, -1)$. Por lo tanto la ecuación del plano es

$$0(x-3) - 5(y-2) + 5(z+1) = 0 \qquad \text{o} \qquad -y + z = 1.$$

30. El plano que pasa por el origen y es perpendicular a $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ es $x - 2y + z = 0$. Aplicamos la fórmula de la distancia con $(A, B, C, D) = (1, -2, 1, 0)$ y $(x_1, y_1, z_1) = (6, 1, 0)$.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{6-2}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

33. Como todos los vectores de este ejercicio son unitarios, $\|\mathbf{N} \times \mathbf{a}\| = \operatorname{sen}\theta_1$ y $\|\mathbf{N} \times \mathbf{b}\| = \operatorname{sen}\theta_2$. De la ley de Snell se deduce que $n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$. Por consiguiente

$$n_1 \|\mathbf{N} \times \mathbf{a}\| = n_2 \|\mathbf{N} \times \mathbf{b}\|.$$

Con objeto de demostrar que $\mathbf{N} \times \mathbf{a}$ y $\mathbf{N} \times \mathbf{b}$ tienen la misma dirección, suponemos que $\mathbf{N}$, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ están en el mismo plano y que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ están del mismo lado de $\mathbf{N}$. Entonces $\mathbf{N} \times \mathbf{a}$ y $\mathbf{N} \times \mathbf{b}$ son perpendiculares a este plano y paralelos enre sí. En consecuencia $n_1 \|\mathbf{N} \times \mathbf{a}\|$ y $n_2 \|\mathbf{N} \times \mathbf{b}\|$ son iguales.

34. Primero se resta 4 veces el primer renglón al segundo. Luego, se resta 7 veces el primer renglón al tercero. El siguiente paso es el desarrollo en menores a lo largo de la primera columna. Por último, se calcula el determinante de 2×2.

1.4 Coordenadas esféricas y cilíndricas

OBJETIVOS

1. Poder cambiar un vector de un sistema coordenado (coordenadas esféricas, cilíndricas o cartesianas) a otro.
2. Poder describir objetos geométricos con coordenadas cilíndricas y esféricas.
3. Poder describir los efectos geométricos al cambiar de coordenadas.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Repaso.* Debes repasar las coordenadas polares en el texto de cálculo de una variable.

2. *Coordenadas cilíndricas.* Se denotan con (r, θ, z), al igual que las coordenadas polares excepto que se ha agregado una coordenada z. Aprende las fórmulas $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\theta = \tan^{-1}(y/x)$.

3. *Coordenadas esféricas.* Se denotan con (ρ, θ, φ), ρ es la distancia al origen. φ es el ángulo formado por la parte positiva del eje z y θ tiene el mismo significado que en coordenadas cilíndricas. Aprende las fórmulas $x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$ y $z = \rho\cos\varphi$. También aprende que $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ y $\varphi = \cos^{-1}(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = \cos^{-1}(z/\rho)$.

4. *Gráficas de r, ρ = constante.* Advierte que en coordenadas cilíndricas la ecuación r = constante describe un cilindro y que en coordenadas esféricas la ecuación ρ = constante describe una esfera. Tal vez has deducido estos hechos de los nombres de las coordenadas.

5. *Cálculo de θ y φ.* Recuerda que en este texto φ toma valores de 0 a π y θ va de 0 a 2π. En algunos casos es mejor definir θ en el intervalo de $-\pi$ a π. Debes tener mucho cuidado al calcular θ. Si $x = y = -1$, entonces $\tan^{-1}(y/x) = \pi/4$, pero si se grafica $(-1, -1)$ en el plano xy se ve que en realidad $\theta = 5\pi/4$. Éste es el motivo por el cual los autores son tan cuidadosos con $\tan^{-1}(y/x)$ en la definición. Graficar x y y ayuda a determinar θ.

6. *r y ρ negativas.* Advierte que hemos definido los números r y ρ no negativos. Si la distancia se da como un número negativo, debemos reflejar el punto dado con respecto al origen.

7. *Vectores unitarios en coordenadas cilíndricas y esféricas.* Los vectores unitarios en coordenadas cilíndricas son $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$. El vector $\mathbf{e}_r$ es paralelo a la recta denominada r. El vector $\mathbf{e}_\theta$ está en la dirección en que se mide el ángulo θ y $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$. Como es de esperarse, estos tres vectores unitarios forman una base y $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z$. Sin embargo, estos vectores no son *fijos,* como en el caso de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, es decir, si cambias el punto (r, θ, z), el conjunto de vectores unitarios *gira.* Para coordenadas esféricas, también hay un conjunto de vectores unitarios $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\varphi$. Estos vectores, en términos de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, y las coordenadas cartesinas del punto se trabajan en el ejercicio 7 (véase más adelante) de esta sección.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (a) Para convertir a coordenadas rectangulares usamos $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$:

$$x = 1\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y} \qquad y = 1\,\mathrm{sen}\,45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Después usamos $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y $\varphi = \cos^{-1}(z/\rho)$ para obtener coordenadas esféricas:

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1} = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Por lo tanto, el punto con coordenadas cilíndricas $(1, 45^\circ, 1)$ tiene coordenadas rectangulares $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$ y coordenadas esféricas $(\sqrt{2}, \pi/4, \pi/4)$.

(b) Para convertir a coordenadas cilíndricas usamos $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\theta = \tan^{-1}(y/x)$:

$$r = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \qquad \text{y} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{1}{2}.$$

Ahora usamos las mismas fórmulas que en la parte (a) para obtener coordenadas esféricas:

$$\rho = \sqrt{4+4+1} = 3 \qquad \text{y} \qquad \varphi = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right).$$

Por consiguiente, el punto con coordenadas rectangulares $(2, 1, -2)$ convierte a coordenadas cilíndricas $(\sqrt{5}, \tan^{-1}1/2, -2)$ y a coordenadas esféricas $(3, \tan^{-1}(1/2), \cos^{-1}(-2/3))$.

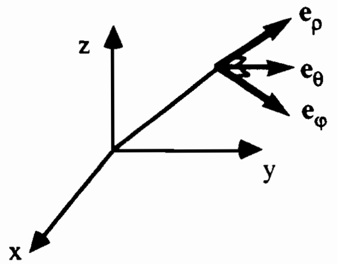
2. (b) Este mapeo toma un punto y lo gira por π radianes alrededor del eje z. A esto le sigue una reflección respecto al plano xy. El efecto esencial es que el punto se refleja a través del origen.

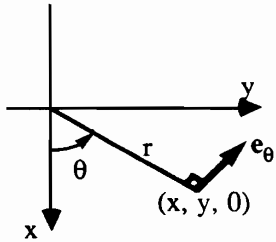
3. (b) Este mapeo toma un punto y lo refleja a través del plano xy.

5. Sea $\rho \geq 0$, entonces $(\rho, 0, 0)$ está en la parte positiva del eje z. Supongamos que φ varía de 0 a π. Entonces $(\rho, 0, \varphi)$ es la mitad del plano xy en donde $x \geq 0$. Si permitimos que θ varíe de 0 a 2π, giramos el semiplano que se describió anteriormente. Por lo tanto $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $0 \leq \varphi \leq \pi$ describe todos los puntos de $\mathbf{R}^3$.
Si $\rho < 0$, las coordenadas no son únicas. Por ejemplo, $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ tiene coordenadas esféricas $(\sqrt{2}, \pi/4, \pi/2)$ o $(-\sqrt{2}, 5\pi/4, \pi/2)$.

7. (a) Primero, $\mathbf{e}_\rho$ es el vector unitario paralelo al vector (x, y, z), por consiguiente, la fórmula es

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$





Luego, $\mathbf{e}_\theta$ es paralelo al plano xy y denota la dirección en que se mide el ángulo θ. Es perpendicular a $r = (x, y, 0)$, de manera que $(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = 0$. Como queremos que θ se mida en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj, $a = -y$ (en lugar de y) y $b = x$. Por lo tanto,

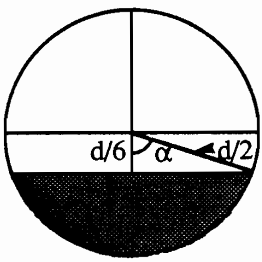
$$\mathbf{e}_\rho = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

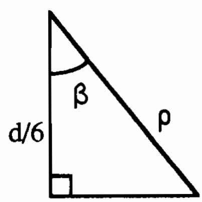
Para encontrar $\mathbf{e}_\varphi$, observamos que puesto que $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\varphi$ es un conjunto de vectores ortonormales; éstos forman un sistema coordenado de la mano derecha con $\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\varphi$. Por consiguiente

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{(x, y, x) \times (-y, x, 0)}{r\rho} \frac{-xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

9. (a) La longitud de $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, la cual es la definición de ρ.
   (b) Observa que $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = z$, por lo tanto, $\varphi = \cos^{-1}(z/\rho) = \cos^{-1}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}/\|\mathbf{v}\|)$.
   (c) Observa que $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, que es la coordenada cilíndrica r y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = x$; por consiguiente, $\theta = \cos^{-1}(x/r) = \cos^{-1}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}/\|\mathbf{u}\|)$.

13. Observa que φ estará entre $\pi/2$ y π debido a que la región está en el hemisferio





inferior. Del triángulo vemos que $\cos\alpha = (d/6) \div (d/2) = 1/3$, entonces, tenemos $\pi - \alpha \leq \varphi \leq \pi$ o $\pi - \cos^{-1}(1/3) \leq \varphi \leq \pi$. Ahora, ρ puede ser tan grande como $d/2$; sin embargo, conforme ρ se hace más pequeño, su límite inferior depende de φ. Toma cualquier φ, entonces $\varphi + \beta = \pi$ y, si revisas el diagrama, $\cos\beta = (d/6) \div \rho$. Una simplificación nos da $d/(6\cos\beta) = \rho = d/(6\cos(\pi - \varphi)) = -d/(6\cos\varphi)$. En consecuencia, $-d/(6\cos\varphi) \leq \rho \leq d/2$. Hasta este momento hemos descrito la sección cruzada en un cuadrante. El volumen entero requiere una revolución alrededor del eje z, de manera que su descripción es

$$-\frac{d}{6\cos\varphi} \leq \rho \leq \frac{d}{2}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \text{y} \quad \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \leq \varphi \leq \pi.$$

1.5 Espacio euclidiano n-dimensional

OBJETIVOS

1. Poder extender las ideas de las secciones anteriores a $\mathbf{R}^n$.

2. Multiplicar matrices.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *El espacio* $\mathbf{R}^n$. La mayor parte del texto toma los ejemplos en los espacios euclidianos que podemos vizualizar, $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. Muchas de las propiedades que cumplen estos espacios también las cumple $\mathbf{R}^n$. La suma de vectores, la longitud de un vector, el producto punto y la desigualdad del triángulo se definen de manera similar.

2. *El producto cruz no se puede generalizar.* El pruducto cruz de $\mathbf{R}^3$ *no* tiene una generalización sencilla en $\mathbf{R}^n$ cuando $n \geq 4$.

3. *La base usual de* $\mathbf{R}^n$. El análogo a los vectores $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ se denota con $\mathbf{e}_i$. El vector $\mathbf{e}_i$ es $(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, donde el 1 está en la i-ésima posición. $\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{e}_j$ son ortogonales si $i \neq j$.

4. *Matrices.* Una matriz es un arreglo rectangular de números. A diferencia de los determinantes, una matriz no tiene un valor numérico. Debes recordar que se menciona los renglones antes que las columnas. Entonces una matriz de $n \times m$ tiene n renglones y m columnas. La entrada (i, j) es un número localizado en el renglón i y la columna j.

5. *Multiplicación de matrices.* Debes practicar la multiplicación de matrices hasta que te resulte natural. Supón que las componentes de A son a_{ij} y las de B son b_{kl}, donde

A es una matriz de $m \times p$ y B es una matriz de $p \times n$. Entonces las componentes de AB son

$$(ab)_{mn} = \sum_{j=1}^{p} a_{mj} b_{jn}.$$

Podemos multiplicar una matriz de $m \times p$ por una de $p \times n$, es decir $[m \times p][p \times n]$. Observa que el número de columnas de A es igual al número de renglones de B (p en este caso).

6. *La no conmutatividad de la multiplicación de matrices.* En general, $AB \neq BA$. De hecho, AB puede estar definida sin que BA lo esté. Sin embargo, la multiplicación de matrices *es* asociativa, es decir $(AB)C = A(BC)$ si el producto ABC está definido.

7. *Matrices y transformaciones.* Una matriz de $m \times n$ puede representar una transformación lineal de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$. Para ver esto, sea A la matriz y $\mathbf{x}$ un vector en $\mathbf{R}^n$, representado en forma de matriz de $n \times 1$ y $\mathbf{y}$ un vector en $\mathbf{R}^m$, una matriz de $m \times 1$. Entonces la matriz A lleva el punto de $\mathbf{R}^n$ a un punto en $\mathbf{R}^m$ mediante la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

2. (a) Usamos las propiedades de longitud y producto punto:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) + (\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \\
&= 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2.
\end{aligned}$$

4. Para verificar la desigualdad de CBS, calculamos:

$$\|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}\| = |(1)(3) + (0)(8) + (2)(4) + (6)(1)| = 17.$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{1+0+4+36} = \sqrt{41}.$$

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{9+64+16+1} = \sqrt{90}.$$

Entonces, tenemos $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = \sqrt{17}\sqrt{17} < \sqrt{41}\sqrt{90} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$. Para la desigualdad del triángulo calculamos

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (4, 6, 8, 7)$$

y

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = \sqrt{16+64+36+49} = \sqrt{165} < 13.$$

Efectivamente, tenemos $|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| < 13 < 15 = 6+9 < \sqrt{41} + \sqrt{90} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

8. Calculamos:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad A+B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si desarrollamos por menores sobre el primer renglón, obtenemos

$$\det A = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4.$$

$$\det B = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\det(AB) = 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -12, \qquad \text{y}$$

$$\det(A+B) = 4\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8.$$

11. (a) Para $n = 2$:

$$\det(\lambda A) = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda^2 \det A.$$

Para $n = 3$:

$$\begin{aligned} \det \lambda A &= \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \lambda a_{11}\big(\det(\lambda A_1)\big) - \lambda a_{12}\big(\det(\lambda A_2)\big) + \lambda a_{13}\big(\det(\lambda A_3)\big). \\ &= \lambda \cdot \lambda^2(a_{11}\det A_1 - a_{12}\det A_2 + a_{13}\det A_3) \\ &= \lambda^3 \det A, \end{aligned}$$

donde A_1, A_2 y A_3 son las matrices de 2×2 que se obtienen al desarrollar a lo largo del primer renglón.

Supongamos que para $n = k$, $\det(\lambda A) = \lambda^k \det A$. Entonces para $n = k + 1$, $\det(\lambda A)$ se puede calcular mediante un proceso análogo al del caso de 3×3:

$$\begin{aligned} \det(\lambda A) &= \lambda a_{11}\big(\det(\lambda A_1)\big) - \lambda a_{12}\big(\det(\lambda A_2)\big) + \cdots + (-1)^k \lambda a_{1k}\big(\det(\lambda A_{k+1})\big) \\ &= \lambda^{k+1} \det A, \end{aligned}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son las matrices de $k \times k$ que se obtienen al desarrollar a lo largo del primer renglón.

Por inducción, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ para una matriz A de $n \times n$.

14. Supongamos, como en el libro, que $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. Entonces $\det(ABC) = \det\left[(AB)C\right] = \det(AB)\det(C) = (\det A)(\det B)(\det C)$. (El estudiante puede verificar nuestros supuestos directamente.)

17 Multiplicamos las dos matrices para obtener la matriz identidad:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

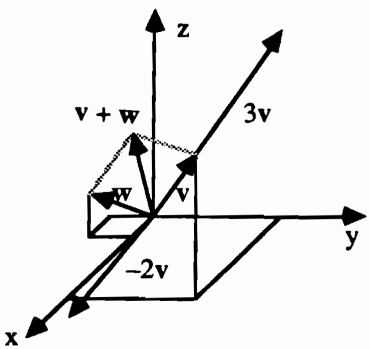
De manera similar podemos demostrar que

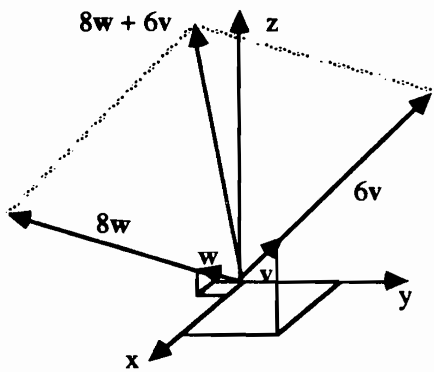
$$\left(\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.R Ejercicios de repaso del capítulo 1

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (3, 4, 5) + (1, -1, 1) = (4, 3, 6) = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$; $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ es la diagonal de un paralelogramo cuyos lados son $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.
$3\mathbf{v} = 3(3, 4, 5) = (9, 12, 15) = 9\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$; $3\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$ con 3 veces su longitud.
$6\mathbf{v} + 8\mathbf{w} = 6(3, 4, 5) + 8(1, -1, 1) = (26, 16, 38) = 26\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$; $6\mathbf{v} + 8\mathbf{w}$ es la diagonal de un paralelogramo cuyos lados son $6\mathbf{v}$ y $8\mathbf{w}$. $6\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$ con 6 veces su longitud, y lo mismo ocurre para $8\mathbf{w}$.
$-2\mathbf{v} = -2(3, 4, 5) = (-6, -8, -10) = -6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$; $-2\mathbf{v}$ es un vector con dirección opuesta a $\mathbf{v}$ y 2 veces su longitud.





$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = (3)(1) + (4)(-1) + (5)(1) = 4$; $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ es el número $\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{k} = 9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k};$$

$\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$. Su longitud es el área del paralelogramo generado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

4. (a) Si usamos la forma punto-dirección de la ecuación de la recta, obtenemos $\mathbf{l}(t) = (0, 1, 0) + t(3, 0, 1)$.
   (b) Si usamos la forma punto-punto de la ecuación de la recta, obtenemos $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (0, 1, 1) + t\left[(0, 1, 0) - (0, 1, 1)\right] = (0, 1, 1) + t(0, 0, -1)$.
   (c) La normal al plano es $(a, b, c) = (-1, 1, -1)$, de manera que la ecuación del plano es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

es decir,

$$-1(x - 1) + 1(y - 1) - 1(z - 1) = 0$$

o

$$x - y + z = 1.$$

5. (b) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = (1)(3) + (2)(1) + (-1)(0) = 5$.

6. (b) $\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$

7. (b) Calculamos $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$ y $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{9+1+0} = \sqrt{10}$. Entonces la definición del producto punto y el resultado del ejercicio 5(b) nos dan

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} = \frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{60}} = \frac{5}{2\sqrt{15}}.$$

8. (b) El área de un paralelogramo es la longitud de $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$. Si usamos el resultado del ejercicio 6(b) obtenemos $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| = [1 + 9 + 25]^{1/2} = \sqrt{35}$.

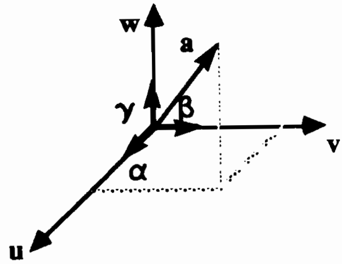
12. Calculamos los siguientes productos usando el hecho de que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ forman una base ortonormal:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w})\cdot\mathbf{u} = \alpha.$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w})\cdot\mathbf{v} = \beta.$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{w} = (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w})\cdot\mathbf{w} = \gamma.$$

La interpretación geométrica es que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$ es la proyección de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{u}$; lo mismo ocurre para los otros vectores.



15. De la definición de producto punto y del hecho de que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$, calculamos

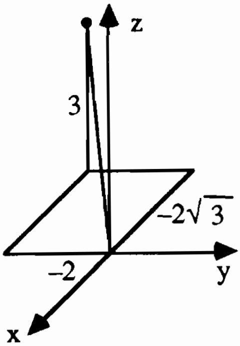
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{a}\|} = \frac{\|\mathbf{a}\|\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \|\mathbf{b}\|\|\mathbf{a}\|^2}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \|\mathbf{b}\|\|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{b}\|} = \frac{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{b}\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{b}\|} = \frac{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Como el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es el mismo que el ángulo entre $\mathbf{b}$ y $\mathbf{v}$, el vector $\mathbf{b}$ debe bisecar el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

18. (a) La respuesta es sí: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}$ implica $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = 0$ o $(\mathbf{a} - \mathbf{a}') \cdot \mathbf{b} = 0$ para toda $\mathbf{b}$. Elegimos $\mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{a}'$ para obtener $\|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\|^2 = 0$, de manera que $\mathbf{a} - \mathbf{a}' = \mathbf{0}$, lo que significa que $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$.
    (b) La respuesta es sí. Si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}$ para toda $\mathbf{b}$, podemos concluir que $(\mathbf{a} - \mathbf{a}') \times \mathbf{b} = 0$ para toda $\mathbf{b}$. Elegimos $\mathbf{b}$ como el vector unitario ortogonal a $\mathbf{a} - \mathbf{a}'$. Por la definición del producto cruz, esto implica que $\|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\| = 0$, de manera que $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$.
    Debes notar que este problema contiene un punto muy sutil: nuestra *hipótesis* es que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}$ para *toda* $\mathbf{b}$; si queremos demostrar que la propiedad establecida no es cierta, debemos poder encontrar *alguna* $\mathbf{b}$ tal que para $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{a}' \times \mathbf{b}$.

22. (e)



Notemos que las coordenadas x y y están en el tercer cuadrante del plano xy. Usaremos las definiciones de la sección 1.4: para coordenadas cilíndricas, calculamos:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{12 + 4} = 4.$$

$$\theta = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \pi + \frac{\pi}{6} + 7\frac{\pi}{6}.$$

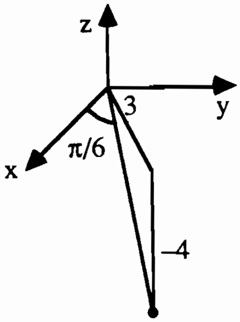
Por lo tanto, las coordenadas cilíndricas son $(4, 7\pi/6, 3)$.
Para coordenadas esféricas, calculamos

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{12 + 4 + 9} = 5.$$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$

Por lo tanto, las coordenadas esféricas son $(5, 7\pi/6, \cos^{-1}(4/5))$.

23. (b)



Si usamos las fórmulas de la sección 1.4, calculamos:

$$x = r\cos\theta = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$$

y

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = 3\frac{1}{2}.$$

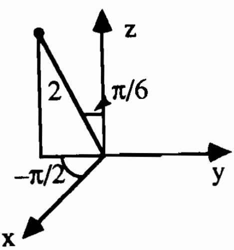
De manera que las coordenadas cartesinas son $(3\sqrt{3}/2, 3/2, -4)$.
Para coordenadas esféricas, calculamos:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4} + 16} = 5.$$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)$$

Por lo tanto, las coordenadas esféricas son $(5, \pi/6, \cos^{-1}(-4/5))$.

24. (b)



Si usamos las fórmulas de la sección 1.4, calculamos:

$$x = \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi = 2(0)\frac{1}{2} = 0,$$

$$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi = 2(-1)\frac{1}{2} = -1,$$

$$z = \rho\cos\varphi = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

De manera que las coordenadas cartesianas son $(0, -1, \sqrt{3})$.
Para coordenadas cilíndricas, calculamos:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0 + 1} = 1.$$

Observamos que $x = 0$ y $y = -1$, por lo tanto, $\theta = 3\pi/2$. Por consiguiente, las coordenadas cilíndricas son $(1, 3\pi/2, \sqrt{3})$.

28. Usando los métodos de la sección 1.5, obtenemos

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

y

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Es fácil ver que $AB \neq BA$.

33. (a) $\mathbf{r}$ es el vector $7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, por lo tanto, $W = F \cdot \mathbf{r} = 70 \cos\theta + 20 \operatorname{sen}\theta$.
(b) Si $\mathbf{F}$ tiene magnitud 6, entonces $\mathbf{F} = 6\cos\theta\mathbf{i} + 6\operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$. Como $\theta = \pi/6$, tenemos $\mathbf{F} = 6(\sqrt{3}/2)\mathbf{i} + 6(1/2)\mathbf{j}$, y por lo tanto $W = F \cdot \mathbf{r} = (21\sqrt{3} + 6)$ pie-lb.

36. Restamos el primer renglón a los renglones segundo y tercero, luego desarrollamos por menores usando la primera columna y obtenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & y^2-x^2 \\ z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$
$$= (y-x)(z^2-x^2) - (z-x)(y^2-x^2) = (y-x)(z-x)(z-y) \neq 0$$

si x, y y z son diferentes. En el último paso usamos el hecho de que $(z^2 - x^2) = (z-x)(z+x)$.

39. (a) Identificamos $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ como un triple producto escalar. Sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y usamos una notación similar para $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. Por lo tanto,

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(b) Usamos la fórmula de la parte (a) y restamos el primer renglón al segundo:

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

Tomamos el valor absoluto y el volumen es $1/3$.

44. Un vector que es normal al primer plano es $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Un vector que es normal al segundo plano es $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$. El producto cruz $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ de estos vectores

normales es ortogonal a cada uno de ellos, por lo tanto, debe ser paralelo a los dos planos. Calculamos $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$, entonces el vector unitario que se pide es $(2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 9\mathbf{k})/\sqrt{134}$.

47. Queremos un vector $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$, tal que $\|\mathbf{v}\| = 1$. De la definición de producto punto sabemos que

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{i}\|}, \quad \text{así,} \quad \mathbf{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}.$$

Como forma ángulos iguales con $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, debemos tener $\beta = \gamma$. Como $\|\mathbf{v}\| = 1$, determinamos que $\beta = \gamma = 1/2\sqrt{2}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{k}.$$

CAPÍTULO 2
DIFERENCIACIÓN

2.1 Geometría de las funciones con valores reales

OBJETIVOS

1. Definir una gráfica, una curva de nivel, un conjunto de nivel y una sección.

2. Poder graficar una función $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Notación.* $f\colon A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ describe a una función f. El dominio es A, el cual es un subconjunto de $\mathbf{R}^n$. Los puntos de A se mapean en la imagen, el cual es un subconjunto de $\mathbf{R}^m$. La única restricción sobre n y m es que deben ser enteros positivos.

2. *funciones de valores reales.* En esta sección estudiamos el caso en el que el valor de m es 1 en la notación $f\colon A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Una función de valores reales asigna un número real *único* a cada elemento de A.

3. *Gráficas.* La gráfica de $f\colon A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ se dibuja en el espacio $\mathbf{R}^{n+1}$. Si $\mathbf{x}$ es un punto de A, entonces la gráfica consta de todos los puntos de $\mathbf{R}^{n+1}$ que tienen la forma $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$, donde $f(\mathbf{x})$ es un número real.

4. *Conjunto de nivel.* Es la gráfica del conjunto de los puntos $\mathbf{x}$ que satisfacen una ecuación de la forma $f(\mathbf{x}) = c$, donde c es una constante (un número fijo). En $\mathbf{R}^2$ estos conjuntos se llaman curvas de nivel y en $\mathbf{R}^3$ se llaman superficies de nivel. Los conjuntos de nivel son importantes para graficar.

5. *Secciones.* Son intersecciones de una gráfica con un plano. En general, en el caso de $\mathbf{R}^3$ las secciones más útiles para graficar son intersecciones con los planos x = constante y y = constante.

6. *Cómo graficar en* $\mathbf{R}^3$. La mejor manera de trazar una gráfica en $\mathbf{R}^3$ es dibujar las curvas de nivel para z = constante. Luego levantar o bajar las curvas a la "altura"

para z = constante. Analizar las secciones ayuda a completar la gráfica. Es buena idea repasar el método para trazar la gráfica de una elipse, una hipérbola, un círculo y una parábola en el libro de cálculo o de precálculo.

7. *Trazado de planos.* Muchos de nosotros no somos buenos artistas, y la geometría tridimensional puede resultar frustrante debido a este problema más que a una falta de entendimiento de las matemáticas. El trazado de planos es más sencillo cuando se dibujan tres puntos no colineales (usualmente en los ejes coordenados) y luego se hace pasar un plano por ellos.

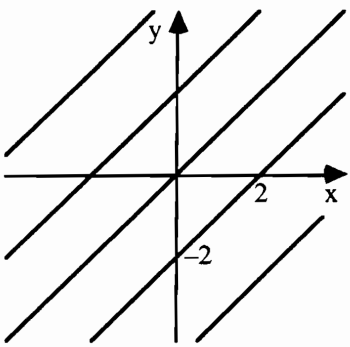
8. *Esferas.* En general, la ecuación $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ representa una esfera de radio r y centro en (a, b, c).

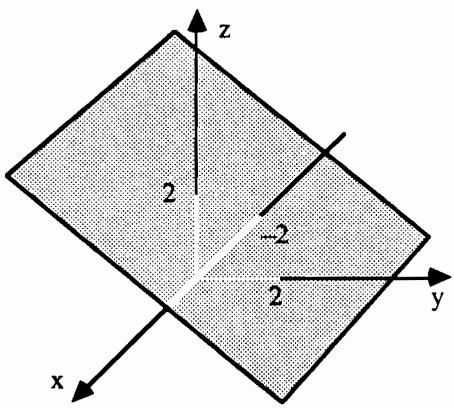
9. *Cilindros.* Una superficie en $\mathbf{R}^3$ se llama cilindro si alguna de las variables x, y o z no aparece en la ecuación. La gráfica de un cilindro se puede dibujar trazando las curvas de nivel en el plano donde la variable que falta es cero. Luego se mueve la curva a lo largo del eje de la variable que falta.

10. *Gráficas en* $\mathbf{R}^4$. El ejemplo 5 presenta una función cuya gráfica no se puede dibujar en papel. Para ver la "gráfica", se puede imaginar un movimiento que muestre las esferas concéntricas expandiéndose.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (a) Para determinar las curvas de nivel nos fijamos en la ecuación $c = x - y + 2$, donde c es una constante. Esta ecuación es equivalente a $y = x + (2 - c)$, que es la ecuación de una recta con pendiente 1 y ordenada al origen $2 - c$.
   La gráfica de f es un plano que interseca a los ejes en $(-2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 2)$.

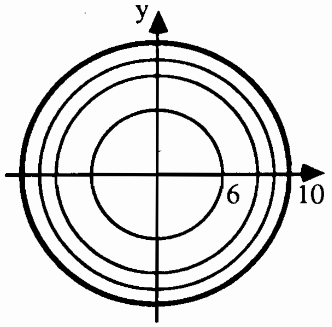


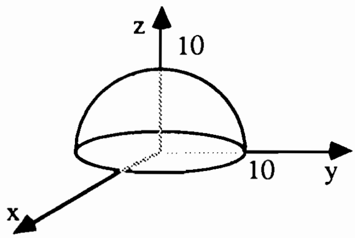


2. (b) Nos fijamos en $c = 1-x^2-y^2$ para c = constante. Esta ecuación es equivalente a $x^2+y^2 = 1-c$, la cual es una ecuación de un círculo de radio $\sqrt{1-c}$, centrada en el origen si $c < 1$. Si $c = 1$, entonces la curva de nivel es el origen. No hay curva de nivel si $c > 1$.

3. (3) Sustituimos $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ para obtener $z = (r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2 = r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r^2$. Ya que $z = r^2$ no depende de θ, la forma de la gráfica no depende de θ.

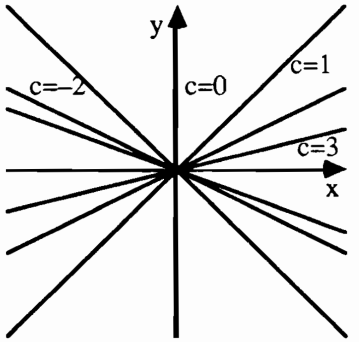
5. Para c igual a constante, la ecuación $c = \sqrt{100-x^2-y^2}$ es equivalente a $c^2 = 100-x^2-y^2$ o $x^2+y^2 = 100-c^2$. Las curvas de nivel son círculos de radio $\sqrt{100-c^2}$, centradas en el origen. De manera que, para $c = 0, 2, 4, 6, 8, 10$, los radios son $10, \sqrt{96}, \sqrt{84}, 8, 6$ y 0, respectivamente. Si dibujamos las curvas de nivel y las levantamos al valor correspondiente de z, obtenemos la siguiente gráfica. La gráfica de $f(x, y)$ es un hemisferio. Las curvas de nivel y las gráficas se muestran a continuación.

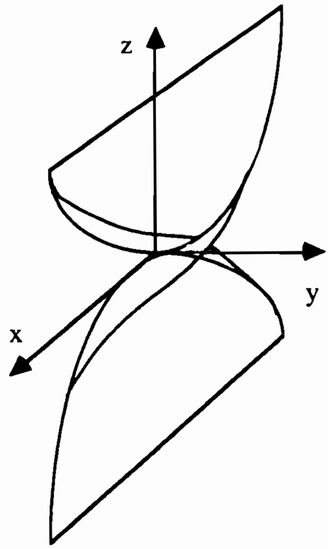




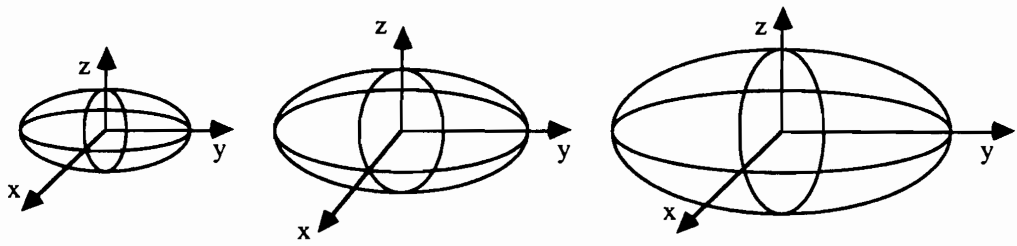
10. Las curvas de nivel tienen ecuación $c = x/y$ o $y = x/c$, donde c es una constante. Estas curvas de nivel son líneas que pasan por el origen con pendiente $1/c$. Una restricción es que $y \neq 0$. Observa que cuando x se mantiene constante, las secciones son las hipérbolas $c = yz$, y cuando y se mantiene constante, obtenemos las rectas $c = x/z$. Si ponemos la información junta, obtenemos el "plano torcido" que aparece en la gráfica.

12. Las superficies de nivel tienen la ecuación $c = 4x^2 + y^2 + 9z^2$. Si $c < 0$ no hay superficie de nivel. Si $c = 0$, la superficie de nivel es el origen. Si $c > 0$, nos debemos fijar en las curvas de nivel para k constante, es decir analizar $c - 9k^2 = 4x^2+y^2$. Observemos que si $9k^2 < c$, entonces las curvas de nivel son elipses que se hacen más pequeñas cuando $|k|$ se aproxima a $\sqrt{c}/3$. De manera similar, vemos que las secciones de nivel paralelas al plano yz tienen la ecuación $c - 4k^2 = y^2 + 9z^2$, que son elipses cuyo "radio" decrece cuando $|k|$ se aproxima a $\sqrt{c}/2$. También las secciones paralelas al plano xz tienen la ecuación $c - k^2 = 4x^2 + 9z^2$, que son elipses

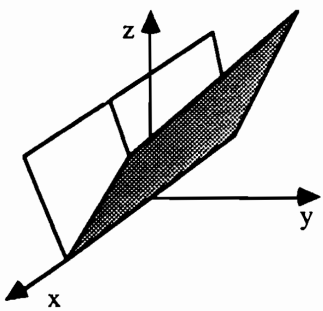




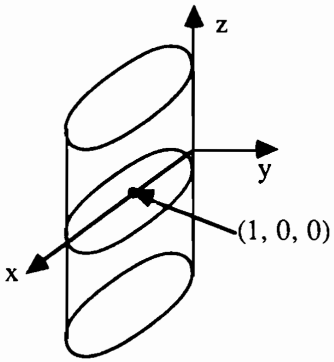
que se hacen más pequeñas si $|k|$ se aproxima a $\sqrt{c}$. Las superficies de nivel son elipses si c es positiva.



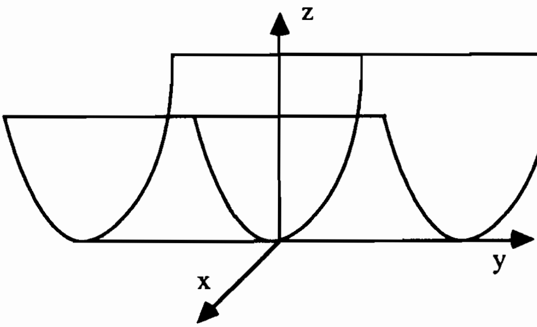
17. Se dibuja la gráfica de $z = |y|$ en el plano yz. Como x no aparece en la ecuación, este dibujo se desplaza a lo largo del eje x y obtenemos la gráfica en $\mathbf{R}^3$.



22. La ecuación se puede escribir en la forma $(x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1$ o $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. En el plano xy es un círculo con radio 1, con centro en el $(1, 0)$. Como z no está en la ecuación, puede tomar cualquier valor, por lo tanto, el círculo se desplaza a lo largo del eje z.

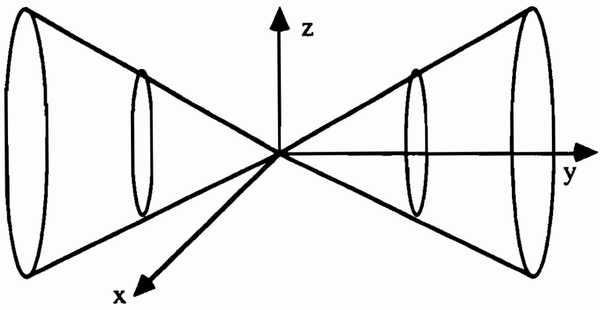


25. Trazamos la gráfica de $z = x^2$ en el plano xz. Luego desplazamos la gráfica a lo largo del eje y y obtenemos un cilindro parabólico. La gráfica se muestra en la siguiente página.

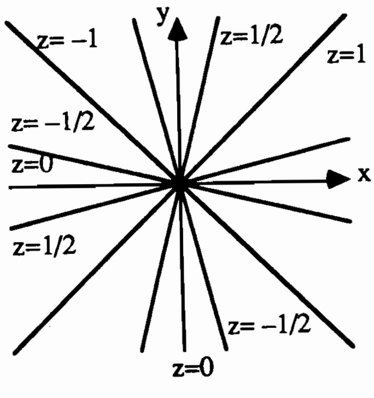


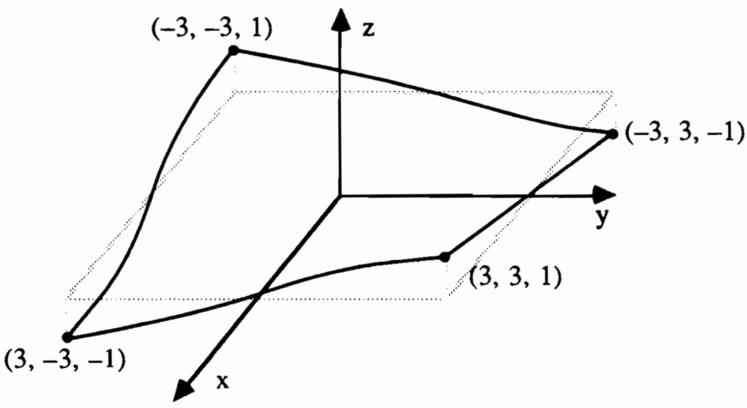
29. Una ecuación equivalente es $4x^2 + 2z^2 = 3y^2$. Cuando $y = 0$ la curva de nivel es el origen. Cuando $y \neq 0$ tenemos secciones de nivel cuyo centro está en el eje y. El eje mayor de cada una de estas elipses es paralelo al eje z y el menor es paralelo al eje x. Las elipses son más grandes conforme $|y|$ aumenta. Con objeto de completar la gráfica, notemos que cuando $x = 0$, las secciones son las líneas rectas $z = \pm\sqrt{3/2}$. Por lo tanto, nuestra gráfica es un cono.

32. Sustituimos $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$. Por consiguiente, si $x^2+y^2 = r^2 \neq 0$, entonces $z = f(x, y) = 2xy/(x^2 + y^2) = 2(r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta)/r^2 = r^2(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)/r^2 = \operatorname{sen}2\theta$. Así, la función se reduce a $z = \operatorname{sen}2\theta$ si $r \neq 0$. Si $-1 \leq z \leq 1$, la curva de nivel es una o dos rectas que pasan por el origen y que satisfacen $z = \operatorname{sen}2\theta$ (véase la gráfica de la izquierda). Si levantamos las gráficas a una altura en la que $z = \operatorname{sen}2\theta$, obtenemos la gráfica de un "plano torcido". (Véase la gráfica en la siguiente página.



La recta punteada es una porción del plano xy.) Si $z > 1$ o $z < -1$, no hay curva de nivel. Notemos que el plano se hace más llano conforme r crece.





2.2 Límites y continuidad

OBJETIVOS

1. Poder definir los siguientes conceptos: disco abierto, conjunto abierto, vecindad, punto frontera, límite, continuidad.

2. Determinar dónde es continua una función.

3. Dada una función, poder calcular un límite o demostrar que tal límite no existe.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Sección teórica.* Esta sección no es esencial para los cálculos de tipo numérico. Es posible que el profesor decida no dar mucho énfasis al material de esta sección. Usa los apuntes para determinar qué importancia tiene la sección para el curso.

2. *Definiciones.* (a) Un *disco abierto* es el conjunto de los puntos $\mathbf{x}$ alrededor de $\mathbf{x}_0$, tales que $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < r$. Esto se denota con $D_r(\mathbf{x}_0)$. Observa la desigualdad estricta.
(b) *Un conjunto abierto* U es un conjunto tal que todo punto $\mathbf{x}_0$ tiene un disco abierto completamente dentro de U. Necesitarás encontrar una r cuando demuestres que es un conjunto abierto.
(c) Una *vecindad* es un cojunto abierto que contiene a $\mathbf{x}_0$.
(d) Un *punto frontera* de un conjunto A no tiene vecindades contenidas totalmente en A o en el complemento de A.

3. *Repaso.* Debes repasar los conceptos de límite y continuidad en tu libro de cálculo de una variable antes de continuar.

4. *Límites.* Debes notar que en la definición de límite no se pide que $\mathbf{x}_0$ sea elemento de A, $\mathbf{x}_0$ puede estar en la frontera de A. Tampoco es necesario que $f(\mathbf{x}_0)$ esté definido. El valor del límite sólo depende de los valores de $\mathbf{x}$ *cercanos* a $\mathbf{x}_0$. En las demostraciones se necesita elegir U, que depende de N.

5. *Propiedades de los límites.* En la mayoría de los casos coinciden con lo que intuitivamente se espera que sea válido. Observa que en las propiedades sobre multiplicaciones y divisiones la funcìón toma valores *en* $\mathbf{R}^1$.

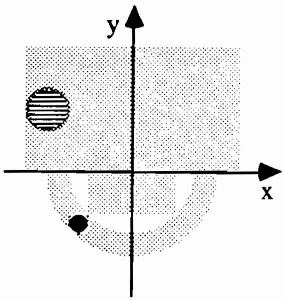
6. *Continuidad.* Al igual que en la definición para funciones de una variable, una función f es continua en $\mathbf{x}_0$ si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0),$$

es decir, el límite es igual al valor de la función. El valor límite que aparece en el lado izquierdo de la igualdad depende del valor de la función *cerca* de $\mathbf{x}_0$. El valor que aparece en el lado derecho, $f(\mathbf{x}_0)$, depende de $\mathbf{x}_0$.

7. *La no existencia de límites.* Algunas veces es fácil demostrar que el límite no existe. Para lo cual, se calcula el límite de f cuando x es constante y luego cuando y es constante; si los dos resultados son diferentes, entonces el límite no existe.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (b) Tomemos $0 < r \leq y$, entonces para cada par (x, y), el disco abierto $D_r(x, y) \subset B$.
   (d) 

Sabemos, por las partes (a), (b) y (c) que A, B y C son abiertos. En el caso de $A \cup B \cup C$ tomamos el más pequeño de los radios usados en las partes (a), (b) y (c). En la figura, el disco a rayas es el mismo que usamos en la parte (b) y el disco negro es el mismo que usamos en la parte (c).

4. (d) Si utilizamos las propiedades de los límites y la sugerencia para la parte (c), calculamos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1.$$

5. (d) Recordemos la definición de derivada: $f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big)/h$. Si hacemos $f(x) = e^x$ y $x_0 = 0$, obtenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = \frac{d}{dx} e^x\Big|_{x=0} = 1.$$

6. (b) Es evidente que el límite del numerador es 0, y que el límite del denominador es $2 \neq 0$, por lo tanto, el límite del cociente es $0/2 = 0$.
   (d) Primero se mantiene y constante y se hace tender x a 0. Luego usamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 - (x^2/2)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x - x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x - 1}{12x^2}.$$

El último límite tiende a $-\infty$, por lo tanto, el límite no existe.

7. (c) Si utilizamos el hecho de que el límite de un vector es el límite de cada componente (teorema 3(v)), obtenemos $\lim_{x\to 1}(x^2, e^x) = (1, e)$.

9. Sea $t = xy$, y si aplicamos el teorema 5, obtenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} xy}{xy} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

12. $f(x) = (1 - x)^8 + \cos(1 + x^3)$ es la suma de dos funciones. La primera es u^8 con $u = 1 - x$. Como u es continua, del teorema 5 obtenemos que $(1 - x)^8$ es continua. La segunda función es $\cos v$ con $v = 1 - x^3$. Otra vez, como v es continua, del teorema 5 se deduce que $\cos(1 + x^3)$ es continua. La suma de funciones continuas es continua, por consiguiente, $f(x)$ es continua.

15. (a) Podemos obtener una función continua si igualamos $f(\mathbf{x}_0)$ y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$. De la misma manera que en el ejercicio 9, podemos hacer $t = x + y$, por consiguiente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{(x+y)} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

Entonces, definimos

$$\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{(x+y)} = 1$$

para $x = y = 0$ y tenemos una función continua.

(b) Primero notemos que si $x = y$, entonces

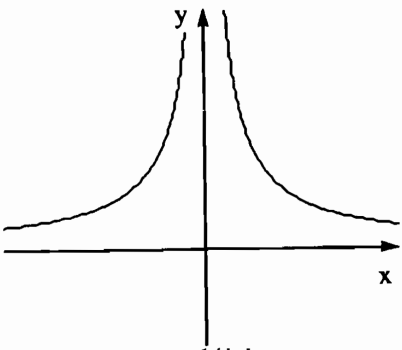
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Por otro lado, si $x = -y$, entonces

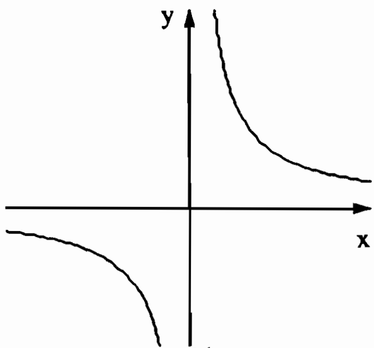
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{2x^2} = \frac{-1}{2}.$$

Como el valor depende de la dirección a la cual nos aproximamos, el límite no existe en el origen, por tanto no es posible obtener una función que sea continua en el origen.

18. (b)



y = 1/|x|



y = 1/x

Queremos encontrar una δ para cada $N > 0$ tal que $0 < x < \delta$ implique $1/|x| > N$. Sea $0 < \delta < 1/N$, entonces $|x| < 1/N$ implica que $1/|x| > N$. Esto no es cierto si se omite el valor absoluto, es decir, $\lim_{x\to 0}(1/x)$ puede ser $+\infty$ o $-\infty$, dependiendo del lado de 0 al que nos aproximemos (véase la figura de la página 35).

23. (a) Por la desigualdad del triángulo, $|a^3+3a^2+a| < |a^3|+3|a^2|+|a|$; como $|a| < 1$ (suponemos que es pequeño porque δ es pequeño), la expresión anterior es menor (o igual) que $5|a|$. Elegimos $\delta < (1/500)$, entonces para $|a| < \delta$, $|a^3 + 3a^2 + a| \leq 1/100$ (advierte que tenemos una estimación muy burda; es probable que una δ más grande también funcione si trabajamos para mejorar la desigualdad).

2.3 Diferenciación

OBJETIVOS

1. Poder establecer la definición de derivadas parciales.
2. Poder calcular una derivada parcial o una matriz de derivadas parciales.
3. Poder calcular un gradiente.
4. Poder calcular un plano tangente.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Notación.* Clase C^n significa que la n-ésima derivada es continua.
2. *Derivadas parciales.* Apréndete la definición

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_i+h,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{h}.$$

   Para calcular $\partial f/\partial x_i$ sin la definición, se consideran constantes todas las variables excepto x_i y se deriva utilizando los mismos métodos usados en cálculo de una variable. La diferenciación se realiza con respecto a la variable x_i.

3. *Notación para derivadas parciales.* En muchos textos se usa f_x en lugar de $\partial f/\partial x$. Si queremos evaluar en un punto dado escribimos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}, \qquad f_x|_{(x_0,y_0)} \qquad \text{o} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \quad \text{si} \quad z = f(x,y).$$

4. *Plano tangente.* La ecuación del plano tangente para una función $f(x, y)$ está dada por

$$z = f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}(x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}(y - y_0).$$

   Esta ecuación se utiliza para calcular una aproximación lineal. Compara esta ecuación con la ecuación de una recta tangente y la aproximación lineal en el caso de una variable. Consulta en la sección 2.5 una generalización.

5. *Diferenciabilidad.* La ecuación (2) nos indica que $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es diferenciable si el plano tangente se aproxima a $f(x_0, y_0)$ cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0). Por otro lado, si $f: U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, entonces

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0,$$

   donde $\mathbf{T}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es la derivada. Debemos poder obtener la ecuación (2) de esta definición. Esta definición de diferenciabilidad es más importante para el trabajo teórico.

6. *Gradiente.* El gradiente es un vector cuyas componentes son las derivadas parciales de f, con $\partial f/\partial x_i$ en la i-ésima. En este caso, f es una función de valores reales. Este operador se denota con el signo ∇. Algunas veces se denota con "grad". Para funciones $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, debes recordar la fórmula

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

7. *Derivada de una función de valores vectoriales.* Consideremos una función $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. La derivada es una matriz de $m \times n$ de derivadas parciales. La imagen consta de vectores de m componentes. Podemos pensar que las componentes son funciones reales de variable vectorial, entonces cada renglón de la matriz derivada es un gradiente. La matriz derivada de f, valuada en $\mathbf{x}_0$, se denota con $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$.

8. *Aspectos importantes.* La diferenciabilidad de una función implica su continuidad, pero la continuidad no implica diferenciabilidad. La existencia de derivadas parciales continuas implica diferenciabilidad, pero el converso no es verdadero. Si una función es diferenciable, entonces las derivadas parciales existen, pero el converso tampoco es verdadero.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (b) Si mantenemos y constante y derivamos con respecto a x, obtenemos $\partial f/\partial x = ye^{xy}$. Por simetría, $\partial f/\partial y = xe^{xy}$. En este problema lo único que hicimos para calcular $\partial f/\partial y$ fue intercambiar x y y. A esto es a lo que nos referimos cuando decimos "simetría".

2. (b) Mantenemos y constante y derivamos con respecto a x. Obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+xy}} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+xy}} \cdot y = \frac{y}{2(1+xy)};$$

de manera similar,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2(1+xy)}.$$

En $(1, 2)$, $\partial z/\partial x = 1/3$ y $\partial z/\partial y = 1/6$. En $(0, 0)$, $\partial z/\partial x = \partial z/\partial y = 0$.

3. (b) Mantenemos y constante y usamos la regla del cociente para calcular:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2x(x^2-y^2) - 2x(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2} = \frac{-4xy^2}{(x^2-y^2)^2}.$$

Mantenemos x constante y usamos la regla del cociente para obtener:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2y(x^2-y^2) - (-2y)(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2} = \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2}.$$

4. (b) Debemos demostrar que las parciales son continuas en el dominio: $\partial f/\partial x = 1/y - y/x^2 = (x^2 - y^2)/x^2y$, que es continua para $x \neq 0$ y $y \neq 0$, $\partial f/\partial y = -x/y^2 + 1/x = (y^2 - x^2)/xy^2$, que es continua para $x \neq 0$ y $y \neq 0$. Entonces $f(x)$ es C^1 porque sus parciales existen y son continuas.

6. (b) La ecuación del plano tangente está dada por $z = z_0 + [f_x(x_0, y_0)](x - x_0) + [f_y(x_0, y_0)](y - y_0)$. Si utilizamos el resultado del ejercicio 1(b), calculamos:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)} = 1; \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)} = 0; \qquad f(0, 1) = 1.$$

Por lo tanto, el plano tangente es $z = 1 + 1(x - 0) + 0(y - 1)$ o $z = 1 + x$.

7. (b) El primer renglón tiene las derivadas parciales de $xe^y + \cos y$, el segundo renglón contiene las de x y en el tercer renglón están las de $x + e^y$. La primera

columna contiene las derivadas parciales con respecto a x y la segunda columna contiene las derivadas parciales con respecto a y. Entonces, la matriz de derivadas parciales es

$$\begin{bmatrix} e^y & xe^y - \operatorname{sen} y \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{bmatrix}$$

8. (b) La función f es un mapeo de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^2$, por lo tanto, la matriz de parciales es de 2×3. Sea $f_1(x, y, z) = x - y$ la primera componente de f. De manera similar, sea $f_2(x, y, z) = y + z$. Entonces

$$\mathbf{D}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

11. Si usamos el resultado del ejercicio 1(b), $x(\partial f/\partial x) = xye^{xy} = y(\partial f/\partial y)$.

12. (b) Utilizamos la fórmula de la aproximación lineal, que es la misma que la del plano tangente: $z = z_0 + [f_x(x_0, y_0)](x - x_0) + [f_y(x_0, y_0)](y - y_0)$. Sea $z = f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$, $x_0 = 1$, $x = 0.99$, $y_0 = 2$ y $y = 2.01$. Calculamos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6y, \quad \text{por lo tanto,} \quad f_x(1, 2) = -9.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 6x, \quad \text{por lo tanto,} \quad f_y(1, 2) = 6.$$

En consecuencia, nuestra aproximación lineal es $z \approx -3 + (-9)(-0.01) + (6)(0.01) = -2.85$. El valor real es -2.8485.

13. (c) El gradiente se define como el vector $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$. Por consiguiente, $\nabla f(x, y, z) = z^2 e^x \cos y\mathbf{i} - z^2 e^x \operatorname{sen} y\mathbf{j} - 2ze^x \cos y\mathbf{k}$.

14. (c) El plano tangente se define con $\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$. Del ejercicio 13(c) tenemos $\nabla f(1, 0, 1) = e\mathbf{i} + 2e\mathbf{k}$, por lo tanto, el plano tangente es $e(x - 1) + 2e(z - 1) = 0$ o $x + 2z = 3$.

17. Calculamos $\nabla f(0, 0, 1) = (2x, 2y, -2z)|_{(0,0,1)} = (0, 0, -2) = -2\mathbf{k}$.

20. Queremos encontrar $\mathbf{T}$ en la ecuación (4). Por linealidad, $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Si denotamos $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ con $\mathbf{h}$, entonces queremos encontrar $\mathbf{T}$ tal que

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{\|f(\mathbf{h}) - \mathbf{T}\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Si elegimos $\mathbf{T} = f$, el numerador se anula para toda $\mathbf{h}$, por lo que satisface la condición, es decir, la derivada de una transformación lineal es ella misma. Por ejemplo, en una variable, consideremos $f(x) = ax$. Del cálculo de una variable, $\mathbf{T} = f'(x_0) = a$ para toda x_0.

2.4 Propiedades de la derivada

OBJETIVOS

1. Poder establecer la regla de la cadena.

2. Poder calcular una derivada parcial usando la regla de la cadena.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Regla de la cadena.* Supongamos que f es función de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ y cada y_i es función de x, entonces

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x}.$$

Observa que en cada sumando aparece df/dx si "eliminamos" ∂y_i y dy_i. Sin embargo, la "suma" del lado derecho es df/dx y *no n* veces df/dx. Observa también que los operadores son diferentes: "∂" es para funciones de varias variables, mientras que "d" es para funciones de *una* variable.

2. *Regla de la cadena para funciones vectoriales.* La regla de la cadena para funciones vectoriales establece que

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}(f)(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}(g)(\mathbf{x}_0) \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0).$$

Éste es el producto de dos matrices derivadas, por lo tanto, cualquier derivada necesaria se puede obtener mediante multiplicación.

3. *Relación entre el gradiente y la regla de la cadena.* Debes entender que si f es una función de valores reales y $h(t) = f(\mathbf{c}(t))$, entonces

$$\frac{dh}{dt} = \nabla f\left(\mathbf{c}(t)\right) \cdot \mathbf{c}'(t).$$

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

2. (b) Por la regla de la suma, f es diferenciable y su derivada es

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] = [1, 1].$$

(f) La función es diferenciable por la regla de la cadena. Sabemos que x^2 y y^2 son diferenciables por la regla del producto y que $1 - x^2 - y^2$ es diferenciable

por la regla de la suma, por lo tanto, la función completa es diferenciable. Su derivada es

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] = \left[\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right]$$

3. (b) Éste es un ejemplo particular del primer caso especial de la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}.\end{aligned}$$

5. (b) Primero calculamos $f\big(\mathbf{c}(t)\big) = \exp(3t^2 \cdot t^3) = \exp(3t^5)$, por consiguiente

$$f'(t) = 15t^4 \exp(3t^5).$$

Luego, por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = ye^{xy}\cdot 6t + xe^{xy}\cdot 3t^2.$$

Ahora sustituimos $x = 3t^2$ y $y = t^3$ para obtener

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= t^3\exp(3t^5)\cdot 6t + 3t^2\exp(3t^2)\cdot 3t^2\\ &= 15t^4\exp(3t^5),\end{aligned}$$

que es el mismo resultado que se obtiene si hacemos el cálculo directo.

6. (b) Tomamos la derivada de cada componente y obtenemos $\mathbf{c}'(t) = (6t, 3t^2)$.

9. Si sustituimos $u = e^{x-y}$ y $v = x - y$ obtenemos

$$f \circ g = (\tan(e^{x-y} - 1) - e^{x-y}, (e^{x-y})^2 - (x-y)^2).$$

Por la regla de la cadena,

$$\mathbf{D}(f \circ g)(x, y) = \mathbf{D}f(u, v)\cdot\mathbf{D}g(x, y).$$

Primero calculamos

$$\mathbf{D}f(u, v) = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sec^2(u-1) & -e^v\\ 2u & -2v\end{bmatrix}$$

Cuando $(x, y) = (1, 1)$, obtenemos $g(1, 1) = (e^{1-1}, 1-1) = (1, 0)$. En consecuencia,

$$\mathbf{D}f(1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora calculamos

$$\mathbf{D}g(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \text{ de donde } \mathbf{D}g(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{D}(f \circ g)(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Un método alternativo es calcular $\mathbf{D}(f \circ g)(x, y)$ directamente de $(f \circ g)(x, y)$.

13. (a) Por la regla de la cadena,

$$\frac{dT}{dt} = \nabla T\big(\mathbf{c}(t)\big) \cdot \mathbf{c}'(t), \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Derivamos:

$$\nabla T(x, y) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right) = (2xe^y - y^3, x^2e^y - 3xy^2).$$

Si sustituimos $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ obtenemos

$$\nabla T\big(\mathbf{c}(t)\big) = (2\cos t\, e^{\operatorname{sen} t} - \operatorname{sen}^3 t, \cos^2 t\, e^{\operatorname{sen} t} - 3\cos t \operatorname{sen}^2 t).$$
$$\mathbf{c}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t).$$

Así,

$$\frac{dT}{dt} = -2\operatorname{sen} t \cos t\, e^{\operatorname{sen} t} + \operatorname{sen}^4 t + \cos^3 t\, e^{\operatorname{sen} t} - 3\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t.$$

(b) Hacemos la sustitución $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ en la expresión para T y obtenemos

$$T(t) = \cos^2 t\, e^{\operatorname{sen} t} - \cos t \operatorname{sen}^3 t.$$

Aplicamos técnicas del cálculo de una variable,

$$\frac{dT}{dt} = -2\operatorname{sen} t \cos t e^{\operatorname{sen} t} + \cos^3 t\, e^{\operatorname{sen} t} + \operatorname{sen}^4 t - 3\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t,$$

que es la misma respuesta que se obtuvo mediante la regla de la cadena en la parte (a).

17. (a) Si $y(x)$ y G son diferenciables, entonces podemos escribir

$$\frac{dG}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Despejamos dy/dx: Si $\partial G/\partial y \neq 0$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial G/\partial x}{\partial G/\partial y}.$$

(b) Como en la parte (a), derivamos G_1 y G_2 con la regla de la cadena:

$$\frac{dG_1}{dx} = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial G_1}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} = 0$$

y

$$\frac{dG_2}{dx} = \frac{\partial G_2}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial G_2}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} = 0.$$

Si suponemos que $y_1(x)$, $y_2(x)$, G son derivables y

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial G_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial G_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{para toda } x,$$

entonces podemos despejar dy_1/dx y dy_2/dx. Volvemos a escribir las dos ecuaciones en la forma

$$\frac{\partial G_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial G_1}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} = -\frac{\partial G_1}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial G_2}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} = -\frac{\partial G_2}{\partial x}. \tag{2}$$

Multiplicamos (1) por $\partial G_2/\partial y_1$ y (2) por $-\partial G_1/\partial y_1$. Si las sumamos obtenemos:

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{-\dfrac{\partial G_1}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial G_2}{\partial y_1} + \dfrac{\partial G_2}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial G_1}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial G_1}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial G_2}{\partial y_1} - \dfrac{\partial G_2}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial G_1}{\partial y_1}}$$

De manera similar,

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{-\dfrac{\partial G_1}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial G_2}{\partial y_2} + \dfrac{\partial G_2}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial G_1}{\partial y_2}}{\dfrac{\partial G_1}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial G_2}{\partial y_2} - \dfrac{\partial G_2}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial G_1}{\partial y_2}}$$

18. Comenzamos con $F(x, y, z)$. Sea $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$ y $z = h(x, y)$; esto significa que $F(f(y, z), y, z) = 0$, $F(x, g(x, z), z) = 0$ y $F(x, y, h(x, y)) = 0$. Derivamos $F(f(y, z), y, z)$ con respecto a y y z y obtenemos

$$F_x \frac{\partial x}{\partial y} + F_y = 0, \tag{1}$$

y

$$F_x \frac{\partial x}{\partial z} + F_z = 0, \tag{2}$$

De manera similar, si derivamos $F(x, g(x, z), z)$ con respecto a x y z y $F(x, y, h(x, y))$ con respecto a y y z, obtenemos

$$F_x + F_y \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$F_y \frac{\partial y}{\partial z} + F_z = 0, \tag{4}$$

y

$$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

$$F_y + F_z \frac{\partial y}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

Si despejamos $\partial x/\partial z$ en (2), $\partial y/\partial x$ en (3) y $\partial z \partial y$ en (6) obtenemos

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_x}, \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z},$$

suponiendo que ninguna de las parciales F_x, F_y y F_z es 0. Multiplicamos y obtenemos -1.

20. (a) Utilizamos la definición de derivada parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{h(0)^2}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

El último paso es válido porque $0/h = 0$ para toda $h \neq 0$. De manera similar,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{0(h^2)}{0^2 + h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Por lo tanto, $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen en $(0, 0)$ y son iguales a 0.

(b) Si $\mathbf{g}(t) = (at, bt)$, entonces

$$(f \circ \mathbf{g})(t) = \frac{(at)(bt)^2}{(at)^2 + (bt)^2} = \frac{ab^2t^3}{(a^2 + b^2)t^2} = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}t,$$

por lo tanto

$$(f \circ \mathbf{g})'(t) = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}.$$

Por otro lado, de la parte (a), tenemos $\nabla f(0, 0) = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)(0, 0) = (0, 0)$. También calculamos $\mathbf{g}'(t) = (a, b)$, por consiguiente, $\nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{g}'(0) = (0, 0) \cdot (a, b) = 0$. Por lo tanto, la regla de la cadena no es aplicable a esta función.

24. La expresión $\partial w/\partial x$ en el lado izquierdo representa a la derivada parcial de $w(x, y, g(x, y))$ con respecto a x, cuando se mantiene y constante; la expresión $\partial w/\partial x$ del lado derecho representa a la derivada parcial de $w(x, y, z)$ con respecto a x, cuando se mantiene y y z constantes. Por tanto, el lado derecho no es igual al lado izquierdo.

2.5 Gradientes y derivadas direccionales

OBJETIVOS

1. Poder definir una derivada direccional.

2. Poder calcular una derivada direccional.

3. Poder explicar el significado de gradiente.

4. Entender las relaciones entre la derivada direccional, el gradiente, el plano tangente y los conjuntos de nivel.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *El ejemplo 1 es importante.* En muchos ejemplos del libro se utiliza el hecho de que $\nabla \mathbf{r} = \mathbf{r}/r$, donde $\mathbf{r} = (x, y, x)$ y $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Esto se deduce en el ejemplo 1. Podemos ahorrar mucho tiempo si recordamos este resultado.

2. *Definición.* La derivada direccional se define como

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})|_{t=0} \qquad \text{o} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h}.$$

La derivada direccional nos da la razón de cambio en la dirección de $\mathbf{v}$.

3. *Interpretación geométrica.* Supongamos que $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es un vector unitario, (x_0, y_0) es un punto dado y $f(x, y)$ es una superficie. La derivada direccional nos da la "pendiente" de una curva en (x_0, y_0) en la dirección de $\mathbf{v}$. La curva está formada por la intersección de la superficie con el plano descrito por el conjunto de puntos $s\mathbf{v} + t\mathbf{k}$. Si $\mathbf{v}$ no es un vector unitario, entonces la "pendiente" se puede determinar si normalizamos $\mathbf{v}$ a ser un vector unitario.

4. *Relación con derivadas parciales.* Las derivadas parciales $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$ son derivadas direccionales en la dirección de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, respectivamente.

5. *Cómo calcular derivadas direccionales.* La fórmula más sencilla para calcular la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{v}$ es $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$. La derivada direccional es un escalar, *no* un vector.

6. *Propiedades del gradiente.* Recordemos que $\nabla f = (\partial f/\partial x)\mathbf{i} + (\partial f/\partial y)\mathbf{j} + (\partial f/\partial z)\mathbf{k}$. Debemos saber que ∇f apunta en la dirección en que f aumenta más rápido y $-\nabla f$ apunta en la dirección en que f decrece más rápido. El gradiente siempre es ortogonal a una superficie de nivel de f.

7. *Plano tangente.* En términos de gradiente, el plano tangente es $\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = 0$. Esto generaliza la fórmula dada en la sección 2.3

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. La derivada direccional de $f(\mathbf{x})$ en $\mathbf{x}_0$ en la dirección de $\mathbf{d}$ es $\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{d}$.

$$\begin{aligned}
\nabla f(1, 1, 2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) &= (z^2, 3y^2, 2xz)|_{(1,1,2)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) \\
&= (4, 3, 4) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) \\
&= \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

2. (a) Dada $f(x, y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$, calculamos:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x, y) &= \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathbf{j} \\
&= \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

De donde $\nabla f(1, 0) = (1, 0)$ y la derivada direccional es $\nabla f(1, 0) \cdot \mathbf{v} = 2/\sqrt{5}$.

3. (b) Dada $f(x, y, z) = e^x + yz$, calculamos $\nabla f(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ y $\nabla f(1, 1, 1) = e\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. El vector unitario paralelo a $(1, -1, 1)$ es $(1, -1, 1)/\sqrt{3}$. Por tanto, la derivada direccional es $\nabla f(1, 1, 1) \cdot (1, -1, 1)/\sqrt{3} = e/\sqrt{3}$.

4. (c) Para una función de tres variables, (x, y, z), el plano tangente a la superficie es $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$. Para usar esta fórmula es necesario describir la superficie mediante una ecuación de la forma $f(x, y, z) =$ constante. En este caso, $f(x, y, z) = xyz = 1$, por consiguiente $\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ y en $(1, 1, 1)$, $\nabla f = (1, 1, 1)$. Entonces, el plano tangente deseado es $(1, 1, 1) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0$ o $x + y + z = 3$.

5. (b) $z = (\cos x)(\cos y)$, así que $z_x = -\operatorname{sen} x \cos y$ y, por simetría, $z_y = -\operatorname{sen} y \cos x$. En $(0, \pi/2, 0)$, $z_x = 0$ y $z_y = -1$. Por tanto, la ecuación del plano tangente es $z = z_0 + [z_x(x_0, y_0)](x - x_0) + [z_y(x_0, y_0)](y - y_0) = 0 + 0(x - 0) - 1(y - \pi/2)$ o $z + y = \pi/2$.

6. (c) Dada $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2) = 1/r^2$, tenemos $f_x = -2x/(x^2 + y^2 + z^2)^2 = -2x/r^4$. Por simetría, $f_y = -2y/r^4$ y $f_z = -2z/r^4$. Entonces $\nabla f = (-2/r^4)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = -2\mathbf{r}/r^4$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

7. (c) La dirección de crecimiento más rápido se da a lo largo del vector gradiente. Utilizando el resultado del ejercicio 6(c) y obtenemos que la dirección de crecimiento más rápido es $\nabla f(1, 1, 1) = (-2/9)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$.

8. El vector gradiente es normal a la superficie. En este caso tenemos $f(x, y, z) = x^3y^3 + y - z + 2 = 0$, de manera que, $f_x = 3x^2y^3$, $f_y = 3x^3y^2 - 1$ y $f_z = -1$. En el punto $(0, 0, 2)$ calculamos $f_x = 0$, $f_y = 1$ y $f_z = -1$. Por lo tanto, el vector normal es $\nabla f(0, 0, 2) = \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Lo normalizamos para obtener el vector normal unitario $\left(1/\sqrt{2}\right)(\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

13. (b) Por definición, $\nabla f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$, de modo que, $\nabla f = (yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz})$. Dada $\mathbf{g}(t) = (6t, 3t^2, t^3)$, diferenciamos componente a componente y obtenemos $\mathbf{g}'(t) = (6, 6t, 3t^2)$. Ahora, de la sección 2.4, sabemos que $(f \circ \mathbf{g})'(1) = \nabla f\big(\mathbf{g}(1)\big) \cdot g'(1) = \exp(18t^6)(3t^5, 6t^4, 18t^3) \cdot (6, 6t, 3t^2)|_{t=1} = e^{18}(18+36+54) = 108e^{18}$

17. Por definición, $\nabla f = (f_x, f_y)$. Como f es independiente de y, $f_y = 0$ y dado que $f(x, y) = g(x)$, tenemos que $f_x = \partial f/\partial x = g'(x)$. Entonces, $\nabla f(x, y) = (g'(x), 0)$.

20. La dirección en la cual la altura crece de manera más rápida en el punto (x, y) es $\nabla z(x, y) = (-2ax, -2by)$. En el punto $(1, 1)$, $\nabla z(1, 1) = -2(a, b)$, por tanto la dirección buscada es, $-(a\mathbf{i}+b\mathbf{j})/\sqrt{a^2 + b^2}$. Si se suelta una canica en el punto $(1, 1)$, ésta rodará en la dirección en la cual la altura *decrece* de manera más rápida, de manera que la canica rodará hacia abajo en la dirección $-\nabla z$ o $(a\mathbf{i} + b\mathbf{j})/\sqrt{a^2 + b^2}$

24. (a) Queremos encontrar el valor máximo de $f(\boldsymbol{\sigma}(t)) = (\cos t)(\operatorname{sen} t)$. Igualamos la primera derivada a 0: $df/dt = -(\operatorname{sen} t)(\operatorname{sen} t) + (\cos t)(\cos t) = 0$, por tanto, obtenemos $\cos^2 t = \operatorname{sen}^2 t$ o $t = \pm(\pi/4 + n\pi)$, donde $n = 0, 1, 2, \ldots$. Como $0 \leq t \leq 2\pi$, sólo queremos $t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$. Si evaluamos en estos puntos, obtenemos $f(\boldsymbol{\sigma}(\pi/4)) = f(\boldsymbol{\sigma}(5\pi/4)) = 1/2$ y $f(\boldsymbol{\sigma}(3\pi/4)) = f(\boldsymbol{\sigma}(7\pi/4)) = -1/2$. Por consiguiente, el valor máximo de f sobre la curva $\boldsymbol{\sigma}(t)$ es $1/2$ y el valor máximo es $-1/2$.

2.6 Derivadas parciales iteradas

OBJETIVOS

1. Poder calcular derivadas parciales iteradas.
2. Explicar cuándo las derivadas parciales mixtas son iguales.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Derivadas parciales iteradas.* Son derivadas de orden superior, por ejemplo, derivadas segundas o terceras. Con varias variables, las derivadas de orden superior pueden calcularse respecto a variables diferentes. La notación
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \text{significa} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
lo cual también se denota con f_{yx}.

2. *Igualdad de las parciales mixtas.* Si las derivadas parciales de primer orden son continuas, entonces una derivada parcial iterada se puede calcular en cualquier orden.

3. *Advertencia.* Debes notar que para poder aplicar el teorema en la igualdad de derivadas parciales mixtas necesitamos que las derivadas parciales de primer orden sean continuas. Si este requerimiento no se cumple, puede ocurrir que al aplicar derivadas parciales en órdenes diferentes nos den resultados diferentes.

4. *Cómo evaluar parciales en un punto dado.* Siempre debes acordarte de derivar completamente antes de sustituir los valores dados. En el caso de parciales mixtas, sólo se puede sustituir una variable después de haber completado las derivadas en dicha variable.

5. *Aplicaciones.* La ecuación de calor, la ecuación de onda y la ecuación de potencial (Laplace), son ejemplos famosos de la forma en que las derivadas parciales aparecen en la naturaleza. Desde luego, no hay necesidad de memorizar estas fórmulas en cálculo vectorial.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (b) Las derivadas parciales de orden 1 son $\partial f/\partial x = e^x - 1/x^2 + e^{-y}$ y $\partial f/\partial y = -xe^{-y}$. Si calculamos las derivadas parciales de las derivadas parciales de primer orden obtenemos las derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = e^x + \frac{2}{x^3}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = e^{-y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = xe^{-y}.$$

2. (a) Si $(x, y) \neq (0, 0)$, podemos calcular las derivadas parciales de orden 1 de la manera usual:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(y(x^2 - y^2) + 2x^2y)(x^2 + y^2) - 2x^2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x(x^2 - y^2) - 2x^2y)(x^2 + y^2) - 2xy^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(b) Para calcular las derivadas parciales en $(0, 0)$ es necesario usar la definición de derivada parcial. Primero mantenemos y constante y derivamos con respecto a x en $x_0 = 0$. Debemos notar que $f(0, 0)$ se definide igual a 0. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{h(0)(h^2 - 0^2)}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

y por la regla de L'Hôpital, $\partial f/\partial x$ en $(0, 0)$ se hace 0. De manera similar, mantenemos x constante y derivamos con respecto a y en $y_0 = 0$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{(0)(h)(0^2 - h^2)}{0^2 + h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

(c) Por definición, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Primero usamos $\frac{\partial f}{\partial y}$ que se calculó en la parte (a) y luego derivamos como en la parte (b). Por definición,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0 + h, 0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{h^5 - 4h^3(0)^2 - h(0)^4}{(h^2 + 0^2)^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^5/h^4}{h} = 1.$$

De manera similar,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(0)^4 h - h^5 + 4(0)^2 h^3}{(0^2+h^2)^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^5/h^4}{h} = -1.$$

(d) Las parciales mixtas no son iguales, lo cual es consistente con el hecho de que las parciales de primer orden no son continuas en (0, 0).

3. (b) Volvemos a escribir las funciones en la forma

$$z = \frac{2x^2 + 7x^2 y}{3xy} = \frac{2x}{3y} + \frac{7x}{3},$$

si $(x, y) \neq (0, 0)$. Calculamos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{3y} + \frac{7}{3}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x}{3y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -\frac{2}{3y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{4x}{3y^3}.$$

En (0, 0) la función no es continua y por lo tanto no es diferenciable.

7. Por definición,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right)$$

Sea $h = \partial f/\partial z$, en consecuencia

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

y por el teorema 15, esto es igual a $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)$. También por el teorema 15, $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, de manera que

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}.$$

11. (a) Nos dan $f(x, y) = x \arctan(x/y)$, entonces calculamos:

$$f_x = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\frac{1}{1+(x^2/y^2)} = \frac{xy}{x^2+y^2} + \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

$$f_y = \frac{x}{1+(x^2/y^2)} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x^2}{x^2+y^2}.$$

$$f_{xx} = \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{1+(x^2/y^2)} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{2y^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{-2x(x^2+y^2) + 2x^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$f_{yy} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y = \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

15. Tenemos $u_x = 3x^2 - 6xy$, de donde $u_{xx} = 6x - 6x = 0$. También, $u_y = 3x^2$, por lo tanto, $u_{yy} = 0$. Si sustituimos nos da $u_{xx} + u_{yy} = 0 + 0 = 0$. Entonces, $u(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace y, en consecuencia, es armónica.

16. (b) Para $u = x^2 + y^2$, tenemos $u_x = 2x$, de manera que $u_{xx} = 2$. También, $u_y = 2y$, por tanto, $u_{yy} = 2$. Si sustituimos en la ecuación de Laplace, obtenemos $u_{xx} + u_{yy} = 2 + 2 \neq 0$, por lo tanto $x^2 + y^2$ *no* es armónica.

(d) Para $u = y^3 + 3x^2y$, obtenemos $u_x = 6xy$ de manera que $u_{xx} = 6y$. También, $u_y = 3y^2 + 3x^2$, por lo tanto, $u_{yy} = 6y$. Si sustituimos en la ecuación de Laplace, obtenemos $u_{xx} + u_{yy} = 6y + 6y \neq 0$, por tanto $y^3 + 3x^2y$ *no* es armónica.

19. Dada $V(x, y, z) = -GM/\sqrt{x^2+y^2+z^2} = -GM/r$, calculamos:

$$V_x = \frac{GMx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

por lo tanto

$$V_{xx} = GM\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3/2(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2x \cdot x}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$= GM\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right] = GM\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right).$$

Por simetría, $V_{yy} = GM(1/r^3 - 3y^2/r^5)$ y $V_{zz} = GM(1/r^3 - 3z^2/r^5)$. Sumamos y obtenemos:

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = GM\left(\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}\right)$$

$$= 3GM\left(\frac{1}{r^3} + \frac{r^2}{r^5}\right) = 0.$$

2.7 Algunos teoremas técnicos de diferenciación

OBJETIVOS

1. Entender las demostraciones de los teoremas incluidos en el capítulo 2.

2. Usar la desigualdad del triángulo y la definición de límite para demostrar los teoremas.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Material avanzado.* Este material se estudia en cursos medios o avanzados de matemáticas. Los estudiantes que deseen estudiar matemáticas deben leer esta sección aun cuando el profesor no la explique.

2. *Cómo estudiar las demostraciones.* Conforme leas la demostración, debes preguntarte por qué cada paso es válido antes de continuar. Si sientes que has dominado el material, trata de anticipar el siguiente paso.

3. *Definición de límite.* La definición ε-δ del límite (teorema 6) se usa en casi todas las demostraciones. Observa que ε está dado y debemos encontrar δ (y no al revés) que satisfaga la definición. En general, δ se encuentra en función de ε.

4. *Nueva definición de derivada.* En esta sección se da una nueva definición de derivada en términos de ε y δ. Es equivalente a la definición dada en la sección 2.3.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. En este caso, tenemos $f(x, y, z) = (e^x, \cos y, \operatorname{sen} z) = (f_1, f_2, f_3)$, de manera que

$$\mathbf{D}f(x,y,z) = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x & \partial f_1/\partial y & \partial f_1/\partial z \\ \partial f_2/\partial x & \partial f_2/\partial y & \partial f_2/\partial z \\ \partial f_3/\partial x & \partial f_3/\partial y & \partial f_3/\partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen} y & 0 \\ 0 & 0 & \cos z \end{bmatrix}$$

$\mathbf{D}f$ es una matriz diagonal cuando f_1 depende sólo de la primer variable, f_2 depende sólo de la segunda variable, etcétera. Por lo tanto, $\mathbf{D}f$ es diagonal si f_n es una función que depende sólo de la n-ésima variable.

4. Decir que una función es continua en cada punto de su dominio significa que para toda x en el dominio y para toda $\varepsilon > 0$ podemos encontrar una $\delta > 0$ que satisface cierta condición. En general, esta δ depende de x y de ε. Cuando una función es uniformemente continua podemos elegir δ de manera que no dependa de x, es decir, que dada una ε fija, funcione para toda x. Una función continua no siempre es uniformemente continua (por ejemplo, $f(x) = x^2$ en $\mathbf{R}$ o $g(x) = 1/x$ en $(0, 1]$.)

(a) Que $\mathbf{T}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ sea lineal, implica que $\|\mathbf{Tx}\| \leq M\|\mathbf{x}\|$. Dado $\varepsilon > 0$, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, del ejercicio 2(a) se deduce que $\|\mathbf{T}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\| \leq M\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$. Como $\mathbf{T}$ es lineal, $\|\mathbf{T}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{y})\|$. Sea $\delta = \varepsilon/M$, entonces para $0 \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| < \delta$, tenemos $\|\mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{y})\| \leq M\delta = \varepsilon$. Debemos notar que esta demostración funciona porque no depende de la elección de un punto en $\mathbf{R}^n$.

(b) Dado $\varepsilon > 0$, queremos $\delta > 0$ tal que $0 < |x-x_0| < \delta$ implique $|1/x^2 - 1/x_0^2| < \varepsilon$ para toda x y x_0 en $(0, 1]$. Calculamos:

$$\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2}\right| = \frac{|x_0^2 - x^2|}{x^2x_0^2} = \frac{|x-x_0||x+x_0|}{x^2x_0^2}$$
$$= |x-x_0| \cdot \left|\frac{1}{xx_0^2} + \frac{1}{x_0x^2}\right| < |x-x_0|\frac{2}{x_0^3} < \varepsilon$$

(si x_0 es el más pequeño entre x y x_0), es decir,

$$\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2}\right| = |x-x_0|\frac{2}{\{\text{mín}(x, x_0)\}^3}.$$

Notemos que $\text{mín}(x, x_0) > 0$. Sea $\delta < (\varepsilon/2)\{\text{mín}(x, x_0)\}^3$, entonces $|x - x_0| < \delta$ implica

$$\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2}\right| = \delta \cdot \frac{2}{x_0^3} < \frac{\varepsilon}{2}x_0^3 \cdot \frac{2}{x_0^3} = \varepsilon.$$

Sólo hemos demostrado que $f(x) = 1/x^2$ es continua. No es uniformemente continua porque

$$\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2}\right| = \frac{|x_0^2 - x^2|}{x^2x_0^2} = \frac{|x-x_0||x+x_0|}{x^2x_0^2},$$

de manera que para ε fijo, cualquier δ se aproxima a ∞ conforme x_0 se va a 0.

7. Tenemos $f(x, y) = g(x) + h(y)$. Queremos demostrar que como matrices $\mathbf{D}f(x, y) = \big(\mathbf{D}g(x), \mathbf{D}h(y)\big)$. Como g y h son diferenciables en x_0 y y_0, respectivamente, tenemos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|g(x) - g(x_0) - \mathbf{D}g(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0$$

y

$$\lim_{y \to y_0} \frac{|h(y) - h(y_0) - \mathbf{D}h(y - y_0)|}{|y - y_0|} = 0.$$

Ahora usamos la desigualdad del triángulo:

$$\big|g(x) - g(x_0) + h(y) - h(y_0) - \big(\mathbf{D}g(x - x_0) + \mathbf{D}h(y - y_0)\big)\big|$$
$$\leq \big|g(x) - g(x_0) - \mathbf{D}g(x - x_0)\big| + \big|h(y) - h(y_0) - \mathbf{D}h(y - y_0)\big|.$$

Como $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \geq \|x - x_0\|$ y $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \geq \|y - y_0\|$, entonces los dos límites son mayores que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left|g(x) + h(y) - \big(g(x_0) + h(y_0)\big) - \big(\mathbf{D}g(x - x_0)| + \mathbf{D}h(y - y_0)\big)\right|}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|}.$$

Por lo tanto, el límite es 0, y satisface la definición de diferenciabilidad de f en (x_0, y_0).

11. Dada $\varepsilon > 0$, notemos que

$$\left|\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - 0\right| \leq \left|\frac{xy}{x}\right| = |y|,$$

y también sabemos que $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Sea $\delta = \varepsilon$, entonces $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ implica que

$$\left|\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - 0\right| < |y| < \varepsilon.$$

Por consiguiente, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ y f es continua.

16. (a) Supongamos que $\mathbf{y}$ es un punto frontera del conjunto abierto $A \subset \mathbf{R}^n$. Entonces toda bola con centro en $\mathbf{y}$ contiene puntos de A y del complemento de A. De manera que la intersección de A con la bola $D_\varepsilon(\mathbf{y})$ no es vacía. En consecuencia
    (i) $\mathbf{y}$ no está en A porque cada punto de A tiene una vecindad completamente contenida en A, y
    (ii) $\mathbf{y}$ es el límite de una sucesión contenida en A; elegimos $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $D_{(1/n)}(\mathbf{y}) \cap A \neq \emptyset$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

    Elegimos $\mathbf{x}_n$ como un elemento de $D_{(1/n)}(\mathbf{y}) \cap A$. Entonces $\mathbf{x}_n$ está en A y $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_n\| \leq 1/n$, el cual tiende a 0 cuando n tiende a infinito. Supongamos que $\mathbf{y}$ no está en A, pero que existe una sucesión $\{\mathbf{x}_n\}$ en A que converge a $\mathbf{y}$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\mathbf{y}$ está en la intersección de $D_\varepsilon(\mathbf{y})$ con el conjunto de los puntos que no están en A. Por lo tanto, el lado derecho no es vacío. Por otro lado, existe una N tal que $n \geq N$ implica que $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\| < \varepsilon$, es decir, $n \geq N$ implica que $\mathbf{x}_n$ está en $D_\varepsilon(\mathbf{y})$. $\mathbf{x}_N$ está en $D_\varepsilon(\mathbf{y}) \cap A$. Por consiguiente, el lado derecho es un punto frontera de A.

    (b) Supongamos que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, es decir, para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $\mathbf{x}$ en A, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ implica $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon$. Sea $\{\mathbf{x}_n\}$ una sucesión en A que converge a $\mathbf{y}$. Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $\delta > 0$ como antes. Elegimos N tal que $n \geq N$ implica $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}\| < \delta$. Entonces, $n \geq N$ implica $\|f(\mathbf{x}_n) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$, por tanto, la sucesión $\{f(\mathbf{x}_n)\}$ converge a $\mathbf{b}$. (Necesitamos que $\mathbf{y}$ esté en la frontera de A para garantizar la existencia de la sucesión $\{\mathbf{x}_n\}$.)

Para obtener la otra parte, supongamos que es falso que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Entonces existe una $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existe una $\mathbf{x}$ en A tal que $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| < \delta$, pero $\|f(\mathbf{x})-\mathbf{b}\| \geq \varepsilon$. Elegimos $\mathbf{x}_n$ en A tal que $\|\mathbf{x}_n-\mathbf{y}\| < 1/n$, pero $\|f(\mathbf{x}_n) - \mathbf{b}\| \geq \varepsilon$ para $n = 1, 2, 3 \ldots$ (correspondientes a $\delta = 1/n$). Entonces $\mathbf{x}_n$ converge a $\mathbf{y}$ (como en la parte (a)), pero $f(\mathbf{x}_n)$ no converge a $\mathbf{b}$. (Nota: Hemos demostrado la "contrapositiva" del teorema. *Negamos* la afirmación de hipótesis (advierte los cambios en "existe", "para todo" y las desigualdades) y demostramos la *negación* del resultado al que queremos llegar. La diferencia entre este método y demostrar por contradicción es que *no* negamos la hipótesis.)

(c) Sea U un abierto en $\mathbf{R}^m$ con $\mathbf{x}$ en U. La demostración se deduce de la parte (b). En particular

$$\lim_{\mathbf{x}_n\to\mathbf{x}} f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x}) \quad \text{implica} \quad f(\mathbf{x}_n) \to f(\mathbf{x})$$

para cualquier sucesión $\mathbf{x}_n$ que converge a $\mathbf{x}$ en U. Por la parte (b), f es continua en $\mathbf{x}$.

2.R Ejercicios de repaso del capítulo 2

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (a) Como $3x^2$ y y^2 son no negativas, no hay curva de nivel si $z < 0$. Si $z = 0$, la curva de nivel es el origen. Si $z > 0$, la curva de nivel es una elipse con su eje mayor paralelo al eje y y el menor paralelo al eje x. Las elipses se hacen más grandes conforme z aumenta su valor. Si juntamos todas las curvas de nivel obtenemos un paraboloide elíptico.

2. (c) Primero consideremos la superficie $xyz = 0$. La superficie consta de los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. Ahora consideremos $xyz = 1$. Cuando $z = k$, una constante positiva, la curva de nivel es $xy = 1/k$. De manera que obtenmos una hipérbola en el primer y tercer cuadrantes con asíntotas en los ejes x y y. Las hipérbolas se acercan al origen conforme z aumenta su valor. Por tanto, en el primer octante la superficie tiene los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ como asíntotas. De manera similar, hay una superficie en el octante en el cual $z > 0$, $x < 0$ y $y < 0$. La superficie de nivel para $xyz = c$, donde c es una constante positiva que consta de cuatro superficies semejantes que se alejan del origen conforme c crece. Si $c < 0$, la superficie de nivel se coloca en los otros cuatro octantes.

3. (b) La función toma un punto de $\mathbf{R}^1$ en $\mathbf{R}^2$, de manera que las dimensiones de la matriz derivada son 2×1. La derivada es

$$\mathbf{D}f(x) = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x \\ \partial f_2/\partial x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Necesitamos demostrar que el vector normal al plano tangente de $f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es *paralelo* a (x_0, y_0, z_0). Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{-1}{2} \cdot 2x(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}\Big|_{(x_0,y_0)} = \frac{-x_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{-1}{2} \cdot 2x(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}\Big|_{(x_0,y_0)} = \frac{-y_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}.$$

Por tanto, la normal al plano tangente es

$$\frac{-x_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}\mathbf{i} + \frac{-y_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Si multiplicamos la expresión anterior por $-(1 - x_0^2 - y_0^2)^{-1/2}$, obtenemos $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, z_0)$. Geométricamente buscamos la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Los vectores normales a los planos tangentes son precisamente los vectores $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Estos vectores tienen la dirección de $\mathbf{e}_\rho$ (véase el ejercicio 7(a) de la sección 1.4).

7. (b) La ecuación del plano tangente es $z = f(x_0, y_0) + [(\partial f/\partial x)(x_0, y_0)](x - x_0) + [(\partial f/\partial y)(x_0, y_0)](y - y_0)$. En este caso, tenemos $f(-1, -1) = 1$; $\partial f/\partial x = y$; $(\partial f/\partial x)(-1, -1) = -1$; $\partial f/\partial y = x$. De manera que la ecuación del plano tangente es $z = 1 - 1(x + 1) - (y + 1)$ o $x + y + z = -1$.

8. (b) Si $f(x, y, z) =$ constante, entonces la ecuación del plano tangente es $\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$, donde $\mathbf{x} = (x, y, z)$. En este caso, $f(x, y, z) = x^3 - 2y^3 + z^3$, de donde $\nabla f(\mathbf{x}) = (3x^2, -6y^2, 3z^2)$ y $\nabla f(1, 1, 1) = (3, -6, 3)$. En consecuencia, el plano tangente es $(3, -6, 3) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 3x - 6y + 3z = 0$ o $x - 2y + z = 0$.

11. (b) La estrategia en este caso es encontrar algunas "trayectorias" y calcular el límite a lo largo de éstas. Sea $x = 2y$, entonces el límite cuando y tiende a 0 es:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{\left|\frac{x + y}{x - y}\right|} = \lim_{y\to 0} \sqrt{\left|\frac{3y}{-y}\right|} = \sqrt{3}.$$

Por otro lado, tomamos la trayectoria $x = 4y$. Entonces el límite cuando y tiende a 0 es:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{\left|\frac{x + y}{x - y}\right|} = \lim_{y\to 0} \sqrt{\left|\frac{5y}{3y}\right|} = \sqrt{\frac{5}{3}} \neq \sqrt{3}.$$

Como el valor depende de la trayectoria que tomamos, el límite no existe.

12. (b) Mantenemos y y z constantes y usamos la regla de la cadena para derivar con respecto a x. Entonces, $\partial f/\partial x = 10(x+y+z)^9$. Por simetría, $\partial f/\partial y = \partial f/\partial z = 10(x+y+z)^9$. El gradiente es el vector $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z) = 10(x+y+z)^9(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$.

16. Calculamos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,-2) = 2x\big|_{(1,-2)} = 2; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(1,-2) = 2y\big|_{(1,-2)} = 4.$$

Entonces el plano tangente es $z = f(1,-2)+(\partial z/\partial x)|_{(1,-2)}(x-1)+(\partial z/\partial y)|_{(1,-2)}(y+2)$ o $z = 5+2(x-1)-4(y+2)$ o $2x-4y-z=5$.
Geométricamente, el gradiente de $f(x,y) = x^2+y^2$ en $(1,-2)$ es perpendicular a la curva de nivel $z=5$. El plano tangente a la gráfica de f es el plano que contiene a la recta perpendicular al gradiente de f en $(1,-2)$ y que está en plano horizontal $z=5$, y el plano tangente tiene pendiente $\sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$ relativo al plano xy.

18. (a) La derivada direccional es $\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$. Calculamos $\nabla f(\mathbf{x}) = (y+z, x+z, y+x)$, por tanto $\nabla f(1,1,2) = (3,3,2)$. Así, la derivada direccional es $(3,3,2)\cdot(10,-1,2)/\sqrt{105} = (30-3+4)/\sqrt{105} = 31\sqrt{105}$.

21. El insecto se debe mover en la dirección de $-\nabla T(x,y)$, por ser ésta la dirección de mayor decremento. Calculamos $-\nabla T(x,y) = -4x\mathbf{i}+8y\mathbf{j}$ y $-\nabla T(-1,2) = 4\mathbf{i}+16\mathbf{j}$, de modo que el insecto se debe mover en la dirección $4\mathbf{i}+16\mathbf{j}$.

25. (b) Usamos la regla de la cadena para calcular $g_x = \partial g/\partial x = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$. Entonces $g_{xx} = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$. Por simetría, $g_{yy} = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$ y $g_{zz} = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$. Si sumamos, obtenemos

$$g_{xx}+g_{yy}+g_{zz} = -3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + 3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} = 0$$

29. (ii)
(a) La regla de la suma nos dice que x^2+y^4 es diferenciable. Por la regla del producto sabemos que la expresión x^2y^2 es diferenciable. Por último, $x^2y^2/(x^2+y^4)$ es diferenciable por la regla del cociente porque $(x,y) \neq (0,0)$, y por tanto, $x^2+y^4 \neq 0$. Si mantenemos y constante, obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^2(x^2+y^4)-2x(x^2y^2)}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}.$$

Si mantenemos x constante, obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^2y(x^2+y^4)-4x^3(x^2y^2)}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2x^4y-2x^2y^5}{(x^2+y^4)^2}.$$

En el origen, debemos usar la definición de derivada parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0,$$

de manera similar,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^4} - 0}{h} = 0.$$

(b) Las parciales existen en $(0,0)$ y

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0,$$

por consiguiente, por la definición de diferenciablilidad (Ec. (2), Sec. 2.3), f es diferenciable en $(0,0)$. f es diferenciable en todos los demás puntos porque las parciales son continuas. Entonces f es diferenciable. Sin embargo, conforme (x,y) se aproxima al origen, $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ no se aproximan a 0 (toma, por ejemplo, la trayectoria $x = y$), así, las derivadas parciales no son continuas.

30. (b) El vector gradiente es $\nabla f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$. Si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

y por simetría,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Ahora, si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces la definición de derivada parcial nos da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)(0)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{(0+h)^2+(0)^2}\right)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

De manera similar, $(\partial f/\partial y)(0,0) = 0$. Como consecuencia, si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces

$$\nabla f(x,y) = \left[y \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right]\mathbf{i}$$
$$+ \left[x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right]\mathbf{j}$$

y $\nabla f(0,0) = 0\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

33. (b) La derivada direccional es $\nabla f = f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$. En este caso

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

y por simetría,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Por tanto, $\nabla f(1,1) = \left((-1/\sqrt{2})\operatorname{sen}(\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2})\operatorname{sen}(\sqrt{2})\right)$ y la derivada direccional es

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\right), \frac{-1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\right)\right) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}\right).$$

37. (b) Primero calculamos directamente $g(u) = f\left(\mathbf{h}(u)\right) = \operatorname{sen}^2 3u + \cos 8u$. Entonces $dg/du = 6(\operatorname{sen} 3u)(\cos 3u) - 8 \operatorname{sen} 8u$. Cuando $u = 0$, $dg/du = 0$. Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{dg}{du} &= \mathbf{D}f(x,y) \cdot \mathbf{D}\mathbf{h}(u) = [2x, 1]\begin{bmatrix} 3\cos u \\ -8 \operatorname{sen} 8u \end{bmatrix} = [2 \operatorname{sen} 3u, 1]\begin{bmatrix} 3\cos u \\ -8 \operatorname{sen} 8u \end{bmatrix} \\ &= 6(\operatorname{sen} 3u)(\cos 3u) - 8 \operatorname{sen} 8u.\end{aligned}$$

Otra vez, cuando $u = 0$, $dg/du = 0$.

39. La normal a la superficie $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ es $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z) = (2x, 4y, 6z) = 2(x, 2y, 3z)$. En $(1,1,1)$, la normal es $2(1,2,3)$, por tanto, la normal unitaria es $(1,2,3)/\sqrt{14}$, la dirección de vuelo. La velocidad de la partícula es la rapidez por la dirección, o $10(1,2,3)/\sqrt{14}$. Podemos calcular la posición de la partícula si encontramos la recta que pasa por $(1,1,1)$ con dirección $10(1,2,3)/\sqrt{14}$ y cuya ecuación es $(1,1,1) + 10t(1,2,3)/\sqrt{14}$. Esto implica que $x = 1 + 10t/\sqrt{14}$, $y = 1 + 20t/\sqrt{14}$ y $z = 1 + 30t/\sqrt{14}$. En el tiempo T la partícula está en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 103$, lo cual significa que $(1 + 10T/\sqrt{14})^2 + (1 + 20T/\sqrt{14})^2 + (1 + 30T/\sqrt{14})^2 = 103$. Si simplificamos, obtenemos $3 + \left(120/\sqrt{14}\right)T + 100T^2 - 103 = 0$. Despejamos T usando la fórmula cuadrática, tomamos la T positiva únicamente y obtenemos $T = (-3 + \sqrt{359})/5\sqrt{14}$.

42. (a) Por sustitución, $z = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$, de manera que $\partial z/\partial x = 2x$ y $\partial z/\partial y = -2y$.

(b) Por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = v(1) + u(1) = v + u = 2x.$$

También tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = v(1) + u(-1) = v - u = -2y.$$

45. Sea $u(t) = f(t)g(t)$ y $h(u) = e^u$. Por la regla de la cadena tenemos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{du} \cdot \frac{du}{dt} = e^u \left[\frac{df}{dt}g(t) + f(t)\frac{dg}{dt}\right] = \left[\frac{df}{dt}g(t) + f(t)\frac{dg}{dt}\right] \exp[f(t)g(t)].$$

50. La velocidad se define como la derivada del desplazamiento. Por consiguiente, queremos calcular $\partial u/\partial t = -6\cos(x - 6t) + 6\cos(x + 6t)$. Cuando $t = 1/2, x = 1$ y la velocidad es $\partial u/\partial t = -6\cos(-2) + 6\cos(4)$. Como $\cos(-x) = \cos x$, la velocidad es $6\big(\cos(2) + \cos(4)\big)$.

53. (a) Tal como se ha dado, P es función de T y V. Podemos también escribir

$$T = \left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)\left(\frac{V - \beta}{R}\right),$$

de manera que T es función de P y V. Por último, podemos escribir

$$P = \frac{RTV^2 - \alpha(V - \beta)}{V^2(V - \beta)}.$$

Después de reordenar, obtenemos

$$PV^3 - (P\beta - RT)V^2 + \alpha V - \alpha\beta = 0.$$

Como ésta es una ecuación cúbica en V, es teóricamente posible expresar V en términos de P y de T. Por lo tanto, si conocemos dos valores de V, P o T, podemos determinar el tercero.

(b) De la ecuación para T, dejamos V constante y obtenemos

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right) = \frac{V - \beta}{R}.$$

De la ecuación para P, dejamos T constante y obtenemos

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right) = \frac{-RT}{(V - \beta)^2} + \frac{2V\alpha}{V^4} = \frac{-RT}{(V - \beta)^2} + \frac{2\alpha}{V^3}.$$

Ahora, mantenemos P constante y aplicamos diferenciación implícita a la ecuación para P. Obtenemos

$$0 = \frac{R(V - \beta) - \dfrac{\partial V}{\partial T}(RT)}{(V - \beta)^2} + \frac{2V\dfrac{\partial V}{\partial T}\alpha}{V^4} = \frac{R}{V - \beta} - \frac{\partial V}{\partial T}\left[\frac{RT}{(V - \beta)^2} - \frac{2\alpha}{V^3}\right].$$

Esto equivale a

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{(V-\beta)\left(\dfrac{RT}{(V-\beta)^2} - \dfrac{2\alpha}{V^3}\right)}.$$

(c) Si usamos los resultados de la parte (b), obtenemos

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)$$

$$= \left(\frac{V-\beta}{R}\right)\left(\frac{-RT}{(V-\beta)^2} + \frac{2\alpha}{V^3}\right)\left(\frac{R}{(V-\beta)\left(\dfrac{RT}{(V-\beta)^2} + \dfrac{2\alpha}{V^3}\right)}\right) = -1.$$

54. (a) El problema pide la derivada direccional en la dirección de un vector *unitario.* En este caso, dicho vector es $(1, 1)/\sqrt{2}$. También $\nabla h(x, y) = (-0.00130x, -0.00048y)$ y $\nabla h(-2, -4) = (0.00260, 0.00196)$. En consecuencia, la derivada direccional en $(-2, -4)$ en la dirección de $(1, 1)/\sqrt{2}$ es $\nabla h(-2, -4) \cdot (1, 1)/\sqrt{2} = 0.00456/\sqrt{2}$. Esto significa que la altura aumenta $(0.00456/\sqrt{2})$ millas por milla horizontal recorrida.

(b) La dirección de la trayectoria más empinada hacia arriba es $\nabla h(-2, -4) = (0.00260, 0.00196)$.

CAPÍTULO 3
FUNCIONES CON VALORES VECTORIALES

3.1 Trayectorias y velocidad

OBJETIVOS

1. Dada una trayectoria, poder calcular los vectores velocidad y aceleración, así como la rapidez en un punto dado.

2. Poder encontrar una recta tangente para una trayectoria dada.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Trayectorias.* Una trayectoria es una "fórmula" que describe una curva en el espacio. El dibujo de una trayectoria, la cual podemos dibujar en papel, se llama imagen o curva de la trayectoria.

2. *Imágenes de trayectorias.* En ocasiones es conveniente expresar una trayectoria en términos de x y y cuando se quiere conocer su imagen. Podemos lograrlo si eliminamos el parámetro. Por ejemplo, $(x, y) = (t^2, t^4)$ significa $t = \sqrt{x}$, de manera que $y = t^4 = \left(\sqrt{x}\right)^4 = x^2$. Advertencia: en este ejemplo, $x = t^2$, por tanto, x nunca es negativa.

3. *Funciones circulares.* Si una trayectoria se parametriza mediante expresiones de la forma $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$, entonces algunas veces es posible eliminar el parámetro si elevamos al cuadrado y sumamos. Utiliza la identidad $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 = 1$ y otras identidades trigonométricas.

4. *Velocidad, aceleración y rapidez.* Las componentes del vector velocidad son las primeras derivadas de las componentes de la trayectoria. La rapidez es la longitud del vector velocidad. La segunda derivada es el vector aceleración. Observa que la derivada de la rapidez *no* es la aceleración. La rapidez es un escalar, mientras que la velocidad y aceleración son vectores.

5. *Rectas tangentes.* Es fácil encontrar una recta tangente si recordamos que una recta se puede describir de la forma $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$. El vector $\mathbf{a}$ es un vector en la trayectoria y $\mathbf{v}$ es el vector velocidad $\boldsymbol{\sigma}'(t)$.

6. *Solución alternativa al ejemplo 6.* Un punto sobre la trayectoria y sobre la recta tangente es $\boldsymbol{\sigma}(\pi) = (-1, 0, \pi)$. Del tiempo π a 2π, la partícula se mueve a lo largo del vector tangente, de manera que el desplazamiento es $(2\pi - \pi)\big(\mathbf{v}(t)\big)$, donde $\mathbf{v}(t)$ es el vector tangente. Entonces la respuesta es $(-1, 0, \pi) = \pi(0, -1, 1)$.

7. *Segunda ley de Newton.* Ésta establece que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde $\mathbf{F}$ es la fuerza y $\mathbf{a}$ es la aceleración. Debes recordar esto.

8. *Ejemplo 7.* En este ejemplo se deducen tres ecuaciones famosas de astronomía. Es probable que no sea necesario memorizarlas. Pregunta a tu profesor.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

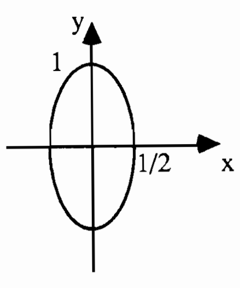
1. (b) Se saca la primera derivada de cada componente y se obtiene $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (e^t, -\operatorname{sen} t, \cos t)$. Evaluamos en $t = 0$ y obtenemos $\boldsymbol{\sigma}'(0) = (1, 0, 1)$.

2. (b) Tenemos $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\operatorname{sen} 3t, \cos 3t, 2t^{3/2})$, de manera que $\boldsymbol{\sigma}(1) = (\operatorname{sen} 3, \cos 3, 2)$. Si tomamos las primeras derivadas, obtenemos el vector velocidad $\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\sigma}'(t) = (3\cos 3t, -3\operatorname{sen} 3t, 3\sqrt{t})$, de modo que $\boldsymbol{\sigma}'(1) = (3\cos 3, -3\operatorname{sen} 3, 3)$. La segunda derivada nos da el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \boldsymbol{\sigma}''(t) = (-9\operatorname{sen} 3t, -9\cos 3t, (3/2)t^{1/2})$, de donde, $\boldsymbol{\sigma}''(1) = (-9\operatorname{sen} 3, -9\cos 3, 3/2)$. La ecuación de la recta tangente es $\mathbf{l}(t) = \boldsymbol{\sigma}(1) + t\boldsymbol{\sigma}'(1)$ o $\mathbf{l}(t) = (\operatorname{sen} 3, \cos 3, 2) + t(3\cos 3, -3\operatorname{sen} 3, 3)$.

3. (b) Tomamos la primera derivada de cada componente para obtener el vector velocidad $\boldsymbol{\sigma}'(t) = \mathbf{v}(t) = (t\cos t + \operatorname{sen} t, -t\operatorname{sen} t + \cos t, \sqrt{3})$. El vector aceleración consta de las segundas derivadas, de manera que $\boldsymbol{\sigma}''(t) = \mathbf{a}(t) = (-t\operatorname{sen} t + 2\cos t, -t\cos t - 2\operatorname{sen} t, 0)$. Por lo tanto, $\mathbf{v}(0) = (0, 1, \sqrt{3})$, $\mathbf{a}(0) = (2, 0, 0)$ y la recta tangente es $\mathbf{l}(\lambda) = \boldsymbol{\sigma}(0) + \lambda\mathbf{v}(0) = \mathbf{0} + \lambda(0, 1, \sqrt{3}) = \lambda(0, 1, \sqrt{3})$.

5. Queremos $\mathbf{F}(0) = m\mathbf{a}(0)$, donde $m = 1$. El vector aceleración es $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = (-\cos t, -4\operatorname{sen} 2t)$, de donde $\mathbf{a}(0) = (-1, 0)$. Así, $\mathbf{F}(0) = -\mathbf{i}$ g-cm/s^2 $= -0.001\mathbf{i}$ newton.

8. (b)



Sea $X = 2x$, por tanto, $X^2 + y^2 = 1$. Identificamos esto como un círculo. Sea $X = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$, de donde, $x = \operatorname{sen} X/2 = (\cos t)/2$. Nuestra trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t)$ está descrita por la fórmula $(x, y) = \big((\cos t)/2, \operatorname{sen} t\big)$

12. (b) Sea $\boldsymbol{\sigma}(t) = \sigma_1(t)\mathbf{i} + \sigma_2(t)\mathbf{j} + \sigma_3(t)\mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\rho}(t) = \rho_1(t)\mathbf{i} + \rho_2(t)\mathbf{j} + \rho_3(t)\mathbf{k}$, de manera que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(t) \times \boldsymbol{\rho}(t) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sigma_1(t) & \sigma_2(t) & \sigma_3(t) \\ \rho_1(t) & \rho_2(t) & \rho_3(t) \end{vmatrix} \\ &= [\sigma_2(t)\rho_3(t) - \sigma_3(t)\rho_2(t)]\mathbf{i} + [\sigma_3(t)\rho_1(t) - \sigma_1(t)\rho_3(t)]\mathbf{j} \\ &\quad + [\sigma_1(t)\rho_2(t) - \sigma_2(t)\rho_1(t)]\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Por la regla del producto, el lado izquierdo es

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\boldsymbol{\sigma}(t) \times \boldsymbol{\rho}(t)] &= \sigma_2'(t)\rho_3(t) + \sigma_2(t)\rho_3'(t) - \sigma_3'(t)\rho_2(t) - \sigma_3(t)\rho_2'(t)]\mathbf{i} \\ &\quad + [\sigma_3'(t)\rho_1(t) + \sigma_3(t)\rho_1'(t) - \sigma_1'(t)\rho_3(t) - \sigma_1(t)\rho_3'(t)]\mathbf{j} \\ &= [\sigma_1'(t)\rho_2(t) + \sigma_1(t)\rho_2'(t) - \sigma_2'(t)\rho_1(t) - \sigma_2(t)\rho_1'(t)]\mathbf{k}.\end{aligned}$$

También calculamos

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} \times \boldsymbol{\rho}(t) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sigma_1'(t) & \sigma_2'(t) & \sigma_3'(t) \\ \rho_1(t) & \rho_2(t) & \rho_3(t) \end{vmatrix} \\ &= [\sigma_2'(t)\rho_3(t) - \sigma_3'(t)\rho_2(t)]\mathbf{i} + [\sigma_3'(t)\rho_1(t) - \sigma_1'(t)\rho_3(t)]\mathbf{j} \\ &\quad + [\sigma_1'(t)\rho_2(t) - \sigma_2'(t)\rho_1(t)]\mathbf{k}.\end{aligned}$$

De manera similar

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(t) \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} &= [\sigma_2(t)\rho_3'(t) - \sigma_3(t)\rho_2'(t)]\mathbf{i} + [\sigma_3(t)\rho_1'(t) - \sigma_1(t)\rho_3'(t)]\mathbf{j} \\ &\quad + [\sigma_1(t)\rho_2'(t) - \sigma_2(t)\rho_1'(t)]\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Si sumamos y comparamos, demostramos que

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{\sigma}(t) \times \boldsymbol{\rho}(t)] = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} \times \boldsymbol{\rho}(t) + \boldsymbol{\sigma}(t) \times \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt}.$$

14. Si usamos el ejercicio 12(b) obtenemos

$$\frac{d}{dt}[m\boldsymbol{\sigma}(t) \times \mathbf{v}(t)] = m\frac{d}{dt}[\boldsymbol{\sigma}(t) \times \mathbf{v}(t)] = m\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} \times \mathbf{v}(t) + \boldsymbol{\sigma}(t) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Pero $d\boldsymbol{\sigma}/dt = \mathbf{v}(t)$, $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}(t)$ y $\mathbf{v}(t) \times \mathbf{v}(t) = 0$, por tanto la ecuación se reduce a

$$m[\mathbf{0} + \boldsymbol{\sigma}(t) \times \mathbf{a}(t)].$$

Si c es una constante

$$c(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = c\mathbf{u} \times w = \mathbf{u} \times c\mathbf{w},$$

de manera que

$$m[\boldsymbol{\sigma}(t) \times \mathbf{a}(t)] = \boldsymbol{\sigma}(t) \times m\mathbf{a}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t) \times \mathbf{F}\big(\boldsymbol{\sigma}(t)\big).$$

Si $\mathbf{F}\big(\boldsymbol{\sigma}(t)\big)$ y $\boldsymbol{\sigma}(t)$ son paralelos, su producto cruz es $\mathbf{0}$, por lo que el momento angular es constante.
Éste es el caso del momento angular, ya que

$$\mathbf{F}\big(\boldsymbol{\sigma}(t)\big) = \frac{mM\boldsymbol{\sigma}(t)}{\|\boldsymbol{\sigma}(t)\|^3},$$

vemos que $\mathbf{F}\big(\boldsymbol{\sigma}(t)\big)$ es un múltiplo de $\boldsymbol{\sigma}$ y por lo tanto, es paralelo a $\boldsymbol{\sigma}(t)$.

3.2 Longitud de arco

OBJETIVOS

1. Poder calcular la longitud de arco de un segmento dado de una trayectoria.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Notación.* Es frecuente que se utilice **s** para denotar una trayectoria en el espacio en lugar de $\boldsymbol{\sigma}$.

2. *Longitud de arco.* Es lo mismo que la longitud de la curva. Las longitudes se pueden sumar, de manera que podemos calcular la longitud de arco para curvas que no son diferenciables en un número finito de puntos.

3. *Fórmula de la longitud de arco.* Tal vez sea más fácil recordar que la longitud de arco es la integral de la rapidez, (*no* de la velocidad). Esto tiene sentido porque la longitud de arco nos da la distancia recorrida. En cualquier caso, debemos saber que la fórmula es

$$l(\boldsymbol{\sigma}) = \int_a^b \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt.$$

4. *Trucos de integración.* (a) Debido a la naturaleza de la fórmula de la longitud de arco, conviene seguir el consejo de la nota de la página 208 y memorizar la fórmula

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \log\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)\right] + C.$$

Si no quieres memorizarla, esta fórmula se puede deducir mediante sustitución trigonométrica. Pregunta al profesor si es semejante a las fórmulas que se pedirán en el examen.
(b) Busca cuadrados perfectos. Los radicales se pueden eliminar del integrando si aparece un cuadrado perfecto.

5. *Sólo existen longitudes de arco positivas.* Si al calcular una longitud de arco tienes un resultado negativo, cometiste algún error. Las longitudes de arco siempre son positivas.

6. *Demostración mediante sumas de Riemann.* Si no entiendes la demostración de la fórmula, debes regresar a ella después de que las sumas de Riemann se expliquen con más detalle en el capítulo 5. Entender la demostración de las fórmulas da un entendimiento más profundo de la teoría.

7. *Advertencia sobre parametrización.* Si necesitas parametrizar una curva, asegúrate de que se recorre una sola vez. La orientación también es importante y será particularmente significativa en el capítulo 7. Las consecuencias negativas de una parametrización incorrecta se ilustran en el ejemplo 1.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (b) Del ejercicio 2(b), sección 3.1 $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (3\cos 3t, -3\cos 3t, 3\sqrt{3})$, también $\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| = [(3\cos 3t)^2 + (-3sen3t)^2 + (\sqrt{t})^2]^{1/2} = \sqrt{9+9t} = 3\sqrt{1+t}$. Así, la longitud de arco es

$$\int_0^1 3\sqrt{1+t}\,dt = 3\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+t)^{3/2}\Big|_0^1 = 2(2^{3/2}-1) = 4\sqrt{2}-2.$$

(g) Dada $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t, t, (2/3)t^{3/2})$, calculamos $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (1, 1, \sqrt{t})$; $\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| = \sqrt{1+1+t} = \sqrt{2+t}$, de manera que la longitud de arco es

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2+t}\,dt = \frac{2}{3}(2+t)^{3/2}\Big|_{t_0}^{t_1} = \frac{2}{3}[(2+t_1)^{3/2} - (2+t_0)^{3/2}].$$

4. Dada $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t, t\,\mathrm{sen}\,t, t\cos t)$, calculamos $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (1, \mathrm{sen}\,t + t\cos t, \cos t - t\,\mathrm{sen}\,t)$. Entonces $\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| = [1 + (\mathrm{sen}\,t + t\cos t)^2 + (\cos t - t\,\mathrm{sen}\,t)^2]^{1/2} = \sqrt{2+t^2}$. Como $\boldsymbol{\sigma}(0) = (0,0,0)$ y $\boldsymbol{\sigma}(\pi) = (\pi, 0, -\pi)$, queremos la longitud de arco en $[0, \pi]$, por lo que necesitamos calcular:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{2+t^2}dt.$$

Esta integral se calcula por el método de sustitución trigonométrica: hacemos $\tan\theta = \sqrt{2}t$ y después efectuamos la integral que contiene $\sec^3\theta$. Esto se deja

como ejercicio. Otra alternativa es usar la fórmula que se encuentra en las tablas de integración:

$$\int_0^\pi \sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{2+t^2} + 2\ln\left(t+\sqrt{t^2+2}\right)\right]\Big|_0^\pi$$
$$= \frac{1}{2}\left[\pi\sqrt{\pi^2+2} + 2\ln\left(\pi+\sqrt{\pi^2+2}\right) - 2\ln\sqrt{2}\right]$$

6. (a) Como $\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{T}(t) = \|\mathbf{T}(t)\|^2 = 1$, podemos derivar ambos miembros de $\mathbf{T}(t)$ $\mathbf{T}(t) = 1$. Mediante la regla del producto para el producto punto (véase el ejercicio 12(a), sección 3.1), $(d/dt)(\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{T}(t)) = (d/dt)(1) = 2\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{T}'(t) = 0$, lo cual implica que $\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{T}'(t) = 0$.

(b) Si comenzamos con $\mathbf{T}(t) = \boldsymbol{\sigma}'(t)/\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|$, podemos derivar con respecto a t, usando la regla del cociente:

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}'(t)}{\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|}\right) = \frac{\boldsymbol{\sigma}''(t)\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| - (d/dt)\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\boldsymbol{\sigma}'(t)}{\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|^2}$$

Recuerda que $\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|^2 = \boldsymbol{\sigma}'(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}'(t)$, de manera que

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| = \frac{d}{dt}\sqrt{\boldsymbol{\sigma}'(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}'(t)} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}'(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}'(t))^{-1/2}(2\boldsymbol{\sigma}'(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}''(t))$$
$$= \frac{\boldsymbol{\sigma}'(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}''(t)}{\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|}.$$

La sustitución lleva a

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{\boldsymbol{\sigma}''(t)}{\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|^2}\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| = \frac{\boldsymbol{\sigma}'(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}''(t)}{\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|^3}\boldsymbol{\sigma}'(t)$$
$$= \frac{\boldsymbol{\sigma}''(t)\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|^2 - (\boldsymbol{\sigma}'(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}''(t))\boldsymbol{\sigma}'(t)}{\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|^3}$$

11. (a) De las definiciones de k y $\mathbf{N}$ en los ejercicios 7(b) y 8,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \mathbf{T}'(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|\frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|} = k\mathbf{N}.$$

Los vectores $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, y $\mathbf{B}$ tienen longitud unitaria y forman un sistema derecho de vectores mutuamente ortogonales, así tenemos

$$\mathbf{T}\times\mathbf{N} = \mathbf{B},\quad \mathbf{N}\times\mathbf{B} = \mathbf{T},\quad \mathbf{B}\times\mathbf{T} = \mathbf{N}.$$

Derivando, si usamos la regla del producto para el producto cruz, obtenemos:

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \frac{d}{ds}(\mathbf{B} \times \mathbf{T}) = \frac{d\mathbf{B}}{ds} \times \mathbf{T} + \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{ds} \times \mathbf{T} - \frac{d\mathbf{T}}{ds} \times \mathbf{B}.$$

Usando el hecho $d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$ (ejercicio 9) junto con los resultados que se obtuvieron en este ejercicio y factorizando la constante del producto cruz, obtenemos

$$-\tau(\mathbf{N} \times \mathbf{T}) - k(\mathbf{N} \times \mathbf{B}) = -\tau(-\mathbf{B}) - k\mathbf{T} = -k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}.$$

Por último,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{B}}{ds} &= \frac{d}{ds}(\mathbf{T} \times \mathbf{N}) = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} = k\mathbf{N} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times (-k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) \\ &= k\mathbf{N} \times \mathbf{N} - k\mathbf{T} \times \mathbf{T} + \tau\mathbf{T} \times \mathbf{B} = \tau\mathbf{N}\end{aligned}$$

como $\mathbf{N} \times \mathbf{N} = \mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$.

(b) Primero obtenemos $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ y después calculamos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \times \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \mathbf{T} & \mathbf{N} & \mathbf{B} \end{vmatrix} \\ &= (\mathbf{B}\omega_2 - \mathbf{N}\omega_3)\mathbf{i} - (\mathbf{B}\omega_1 - \mathbf{T}\omega_3)\mathbf{j} + (\mathbf{N}\omega_1 - \mathbf{T}\omega_2)\mathbf{k} \\ &= \frac{d\mathbf{T}}{ds}\mathbf{i} + \frac{d\mathbf{N}}{ds}\mathbf{j} + \frac{d\mathbf{B}}{ds}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Si igualamos las componentes de $\mathbf{i}$, obtenemos $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N} = \mathbf{B}\omega_2 - \mathbf{N}\omega_3$, así, $\omega_2 = 0$ y $\omega_3 = -k$. De manera similar, obtenemos $\omega_1 = -\tau$, en consecuencia

$$\boldsymbol{\omega} = (-\tau, 0, -k).$$

3.3 Campos vectoriales

OBJETIVOS

1. Poder dibujar un campo vectorial sencillo.

2. Entender la relación entre líneas de flujo y campo vectorial.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Campos vectoriales.* Son mapeos de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^n$. Observa que las dimensiones de los espacios son iguales. A cada punto $\mathbf{x}$ se le asigna un vector. Los campos vectoriales se representan geométricamente dibujando el vector asignado con origen en $\mathbf{x}$.

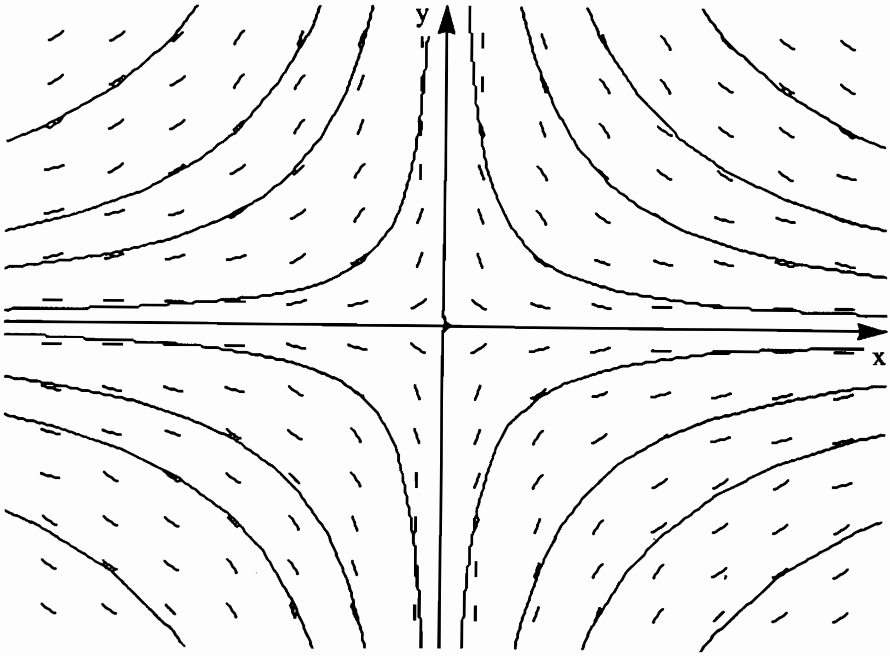
2. *Campos escalares.* Difieren de los campos vectoriales en que a cada punto $\mathbf{x}$ del dominio se le asigna un escalar, *no* un vector. Un ejemplo es la cantidad de lluvia que cae en cada punto de la superfice de la tierra. La velocidad del viento en cualquier instante de tiempo es un ejemplo de campo vectorial.

3. *Gradiente contra campo vectorial.* Todos los campos gradientes son campos vectoriales, pero no todos los campos vectoriales son campos gradientes. Por ejemplo, el campo vectorial, $\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ no es un campo gradiente porque no es posible encontrar una f tal que $\partial f/\partial x = 1$ y $\partial f/\partial y = x$. Si un campo vectorial $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ es un campo gradiente, entonces $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Esta afirmación proviene del hecho de que $\partial^2 f/\partial x\partial y = \partial^2 f/\partial y\partial x$ vale para cualquier función f que tenga un buen comportamiento.

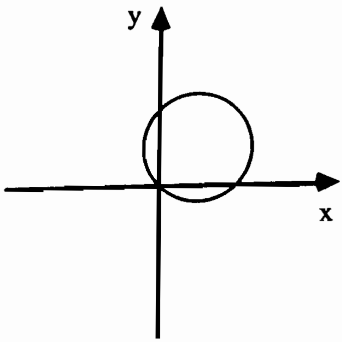
4. *Líneas de flujo.* Son las trayectorias que tomaría una partícula si tuviera la libertad de moverse a lo largo de los vectores de un campo vectorial. Si pensamos en un campo vectorial como la velocidad, las líneas de flujo mostrarían desplazamiento. La fórmula que describe una línea de flujo puede obtenerse si integramos cada componente de un campo vectorial (o si resolvemos un sistema de ecuaciones diferenciales).

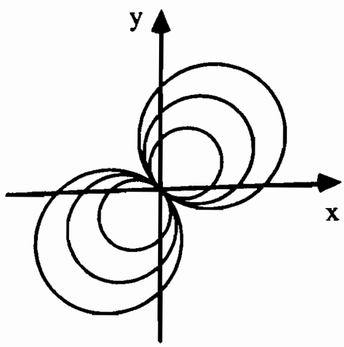
SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

2. (b) En cada punto (x, y) dibujamos una pequeña flecha en la dirección de $(x, -y)$, luego conectamos las pequeñas flechas para obtener las líneas de flujo. Un método alternativo es resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $da/dt = x$, $dy/dt = -y$ y escribir y en términos de x, después graficar las líneas de flujo $y = C/x$ para varios valores de la constante C. Nuestros cálculos generan el dibujo de la siguiente página.



4. Primero dibujamos la superficie de nivel $V(x, y) = (x + y)/(x^2 + y^2) = 1$. Si reordenamos y completamos cuadrados obtenemos $(x^2 - x + 1/4) + (y^2 - y + 1/4) = (x + 1/2)^2 + (y + 1/2)^2 = 1/2$. Por lo tanto, la superficie de nivel $V(x, y) = 1$ es un círculo de radio $\sqrt{1/2}$, centrado en $(1/2, 1/2)$. La gráfica de $-\nabla V$ es dos conjuntos de círculos que pasan por el origen, como se muestra a continuación.





6. Queremos demostrar que $\boldsymbol{\sigma}'(t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t))$. Derivamos para obtener $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (2e^{2t}, 1/t, -1/t^2)$. Calculamos $\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) = (2x, z, -z^2) = (2e^{2t}, 1/t, -(1/t)^2)$, que es, en efecto, $\boldsymbol{\sigma}'(t)$.

3.4 Divergencia y rotacional de un campo vectorial

OBJETIVOS

1. Dado un campo vectorial, poder calcular su divergencia.
2. Dado un campo vectorial, poder calcular su rotacional.
3. Poder explicar el significado físico de divergencia y rotacional.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *El operador* ∇. Este operador, llamado "del" (nabla), nos dice cómo acomodar el vector de derivadas parciales: $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$.
2. *Rotacional.* Observa que el rotacional es un vector, no un escalar. Debes conocer las dos notaciones: $\nabla \times \mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{F}$. Tienes que saber que el rotacional está asociado con rotaciones y que el término irrotacional significa $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$.
3. *Espacio válido para un rotacional.* Observa que el rotacional es una propiedad de $\mathbf{R}^3$. Se puede calcular el rotacional de vectores en dimensiones superiores a 3. El vector de dos dimensiones $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ se debe considerar como $\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ si se desea su rotacional.
4. *Divergencia.* Observa que la divergencia es un escalar, no un vector. Debes conocer las dos notaciones: $\nabla \cdot \mathbf{F} = \operatorname{div}\mathbf{F}$. Tienes que saber que la divergencia es una razón de expansión o compresión. El término incompresible significa que $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$.
5. *Laplaciano.* $\nabla^2 f$ significa $\nabla \cdot (\nabla f)$, que es un escalar.
4. *Teoremas.* Las igualdades $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$ y $\nabla \cdot (\nabla F) = 0$ son útiles; es bueno memorizarlas. Si necesitas alguna de estas igualdades y se te olvidan, siempre puedes obtenerlas mediante cálculos.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (b) El rotacional es $\nabla \times \mathbf{F} =$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(yz)\right)$$

$$+ \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial y}(yz)\right)$$

$$= (x - x)\mathbf{i} - (y - y)\mathbf{j} + (z - z)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

2. (b) La divergencia es $\nabla \cdot \mathbf{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}(yz) + \dfrac{\partial}{\partial y}(xz) + \dfrac{\partial}{\partial z}(xy) = 0.$

3. (b) Primero calculamos $\nabla f = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (y+x)\mathbf{k}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla f &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y+z & x+z & y+z \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}(y+x) - \frac{\partial}{\partial z}(x+z)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(y+x) - \frac{\partial}{\partial z}(y+z)\right]\mathbf{j} \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(x+z) - \frac{\partial}{\partial y}(y+z)\right]\mathbf{k} \\
&= (1-1)\mathbf{i} - (1-1)\mathbf{j} + (1-1)\mathbf{k} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

6. (a)

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 3x^2y & x^3+y^3 & 0 \end{vmatrix} &= \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y)\right) \\
&= \mathbf{k}(3x^2 - 3x^2) = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

(b) Notemos que si $\mathbf{F} = \nabla f$, entonces $3x^2y = (\partial/\partial x)f(x,y)$ y $(x^3+y^3) = (\partial/\partial y)f(x,y)$. Integramos cada ecuación:

$$f(x,y) = \int 3x^2y\,dx = x^3y + g(y),$$

donde g depende sólo de y, y

$$f(x,y) = \int (x^3+y^3)dy = x^3y + \frac{y^4}{4} + h(x),$$

donde h depende sólo de x. En ambos casos, $f(x,y)$ debe ser la misma, así que comparamos ambos lados. Si hacemos $g(y) = y^4/4$ y $h(x)$ una constante arbitraria, entonces $f(x,y) = x^3y + y^4/4 + C$ satisface $\nabla f = \mathbf{F}$.

8. (c) Sea $\mathbf{F}(x,y) = e^x \cos y\mathbf{i} - e^x \operatorname{sen} y\mathbf{j}$, donde la componente de $\mathbf{i}$ es la parte real de e^{x-iy}, y la componente de $\mathbf{j}$ es la parte imaginaria. Calculamos $\operatorname{div}\mathbf{F} = (\partial/\partial x)(e^x\cos y) + (\partial/\partial y)(-e^x \operatorname{sen} y) = e^x\cos y - e^x \cos y = 0$ y

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^x\cos y & -e^x \operatorname{sen} y & 0 \end{vmatrix} &= \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(-e^x \operatorname{sen} y) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x\cos y)\right) \\
&= \mathbf{k}(-e^x \operatorname{sen} y + e^x \operatorname{sen} y) = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto **F** es incompresible y rotacional.

11. Por la regla del producto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\Big|_{t=0} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{w}}{dt} \\ &= [\mathbf{D_x f(0)v}]\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot[\mathbf{D_x F(0)w}]. \end{aligned}$$

Denotemos la matriz $\mathbf{D_x F(0)}$ con $\mathbf{A}$. Primero mostraremos que $\mathbf{A}^T\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{Aw}$. Recuerda (del algebra lineal) que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{w}^T\mathbf{v}$ para dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, y que $(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$. Por tanto,

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{Aw}=(\mathbf{Aw})^T\mathbf{v}=\mathbf{w}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{v})=A^T\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$$

De aquí y de la propiedad distributiva podemos concluir que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\Big|_{t=0}=[(\mathbf{D_x F(0)}+(\mathbf{D_x F(0)})^T)\mathbf{v}]\cdot\mathbf{w}.$$

3.5 Cálculo diferencial vectorial

OBJETIVOS

1. Poder manejar expresiones que contengan producto cruz, producto punto y el operador “del” (nabla).

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Repaso.* Esta sección te da la oportunidad de repasar cómo se calcula el gradiente, el rotacional, la divergencia y el Laplaciano.

2. *Fórmulas en* $\mathbf{R}^3$. Observa que el producto cruz o el rotacional aparcen en las fórmulas de la tabla 3.1; por lo tanto, se supone que las fórmulas se usan en $\mathbf{R}^3$ y no en dimensiones superiores.

3. *Importancia de la tabla 3.1.* Estas fórmulas son útiles en el desarrollo de la teoría de vectores; sin embargo, no debes memorizar la tabla. Se puede consultar la tabla cuando se necesite. Resultará evidente cuáles fórmulas son las más importantes porque las consultarás con más frecuencia.

4. *Ejercicio 8.* Estas fórmulas se usan con mucha frecuencia en los ejemplos. Debes hacer este ejercicio aun cuando no se te asigne.

5. *Coordenadas esféricas y cilíndricas.* Muchos problemas de física e ingeniería implican objetos de forma cilíndrica o esférica. Los sistemas correspondientes de coordenadas son útiles para resolverlos. No es normal que las fórmulas para div, grad y rot en dichas coordenadas se memoricen, pero debes estar preparado para consultarlas, dependiendo del gusto de tu profesor.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

3. (9) Queremos demostrar que el $\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{G}$. Denotemos $\partial A/\partial x$ con A_x. Sea

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) \quad \text{y} \quad \mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) &= \operatorname{div}[(F_2G_3 - F_3G_2)\mathbf{i} + (G_1F_3 - F_1G_3)\mathbf{j} + (F_1G_2 - F_2G_1)\mathbf{k}]\\
&= (F_2G_3 - F_3G_2)_x + (G_1F_3 - F_1G_3)_y + (F_1G_2 - F_2G_1)_z\\
&= (F_2)_xG_3 + F_2(G_3)_x - (F_3)_xG_2 - F_3(G_2)_x\\
&\quad + (G_1)_yF_3 + G_1(F_3)_y - (F_1)_yG_3 - F_1(G_3)_y\\
&\quad + (F_1)_zG_2 + F_1(G_2)_z - (F_2)_zG_1 - F_2(G_1)_z\\
&= \{G_1[(F_3)_y - (F_2)_z] - G_2[(F_3)_x - (F_1)_z]\\
&\quad + G_3[(F_2)_x - (F_1)_y]\} - \{F_1[(G_3)_y - (G_2)_z]\\
&\quad - F_2[(G_3)_x - (G_1)_z] + F_3[(G_2)_x - (G_1)_y]\}\\
&= \mathbf{G}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{G}.
\end{aligned}$$

5. (c) Sustituyendo directamente,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G} &= [2xz^2(\partial/\partial x) + (\partial/\partial y) + y^3zx(\partial/\partial z)](x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k})\\
&= 2xz^2(\partial/\partial x)(x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) + (\partial/\partial y)(x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k})\\
&\quad + y^3zx(\partial/\partial z)(x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k})\\
&= 4xz^2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2y^3zx\mathbf{k} = 4x^2z^2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2y^3z^2x\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

8. (a) Tenemos $\nabla(1/r) = \nabla(1/\sqrt{x^2+y^2+z^2})$. Empezemos encontrando $(\partial/\partial x)(1/r)$ o

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{-2x}{2(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-x}{r^3}.$$

Por simetría, $(\partial/\partial y)(1/r) = -y/r^3$ y $(\partial/\partial z)(1/r) = -z/r^3$. Por tanto, $\nabla(1/r) = -(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/r^3 = -\mathbf{r}/r^3$. En general

$$\nabla(r^n) = \nabla((x^2+y^2+z^2)^{n/2})$$

y

$$(\partial/\partial x)((x^2+y^2+z^2)^{n/2}) = (n/2)((x^2+y^2+z^2)^{n/2-1})2x = nxr^{n-2},$$

en consecuencia, por simetría,

$$\nabla(r^n) = nr^{n-2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = nr^{n-2}\mathbf{r}.$$

Por último,

$$\nabla(\log r) = \nabla\left(\log\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\right),$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\log\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = \frac{x}{r^2},$$

en consecuencia, por simetría, $\nabla(\log r) = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/r^2 = \mathbf{r}/r^2$.

(b) Usando los resultados de la parte (a), $\nabla^2(1/r) = \nabla \cdot \nabla(1/r) = \nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) =$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\right)\right].$$

La primera derivada parcial es

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) &= \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}\\ &= \frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.\end{aligned}$$

Por simetría,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{x^2+y^2+z^2-3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{x^2+y^2+z^2-3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

Entonces

$$\nabla \cdot \left(\frac{-\mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{3(x^2+y^2+z^2) - 3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0.$$

De manera similar, la parte (a) nos dice en el caso general,

$$\nabla^2(r^n) = \nabla \cdot \nabla(r^n) = \nabla \cdot (nr^{n-2}\mathbf{r}).$$

Calculamos

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}((x^2+y^2+z^2)^{n/2-1}\cdot x)\\&= n\left[(x^2+y^2+z^2)^{n/2-1}+2x^2\left(\frac{n}{2}-1\right)(x^2+y^2+z^2)^{n/2-2}\right].\end{aligned}$$

Otra vez por simetría,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(nr^{n-2}\mathbf{r}) &= n[3(x^2+y^2+z^2)^{n/2-1}\\&\quad+(x^2+y^2+z^2)(n-2)(x^2+y^2+z^2)^{n/2-2}].\\&= nr^{n-2}(3+n-2)=n(n+1)r^{n-2}.\end{aligned}$$

(c) La identidad $\nabla\cdot(\mathbf{r}/r^3)=0$ se obtiene inmediatamente de la parte (b).

Para el caso general, usamos otra vez la parte (b) y calculamos $\nabla\cdot(r^k\mathbf{r})$. Observemos que solamente necesitamos dividir los resultados del caso general entre n y cambiar $n-2$ por k (¿Por qué?). Entonces $\nabla\cdot(r^k\mathbf{r})=(k+3)r^k=(n+3)r^n$, así, si cambiamos el nombre de k por n obtenemos el resultado.

(d) Mediante un cálculo directo, obtenemos

$$\nabla\times\mathbf{r}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\x&y&z\end{vmatrix}=\mathbf{0}.$$

Mediante la fórmula 11 de la tabla 3.1, el cálculo y el caso general en la parte (a) es completo,

$$\begin{aligned}\nabla\times(r^n\mathbf{r})&=r^n(\nabla\times\mathbf{r})+\nabla(r^n)\times\mathbf{r}\\&=\mathbf{0}+nr^{n-2}(\mathbf{r}\times\mathbf{r})=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

11. Sea $x=r\cos\theta$ y $y=r\operatorname{sen}\theta$, así, $\partial x/\partial r=\cos\theta$, $\partial y/\partial r=\operatorname{sen}\theta$, $\partial x/\partial\theta=-r\operatorname{sen}\theta$ y $\partial y/\partial\theta=r\cos\theta$. Mediante la regla de la cadena:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\quad\text{y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}=-r\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Ahora despejamos $\partial u/\partial y$: multiplicamos la expresión $\partial u/\partial r$ por $r\operatorname{sen}\theta$ y multiplicamos la expresión $\partial u/\partial\theta$ por $\cos\theta$. Las sumamos:

$$r\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=r\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\text{ implica }\frac{\partial u}{\partial y}=\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right).$$

De manera similar, despejamos $\frac{\partial u}{\partial x}$. Multiplicamos la expresión $\partial u/\partial r$ por $r\cos\theta$ y multiplicamos la expresión $\partial u/\partial\theta$ por $-\operatorname{sen}\theta$. Sumamos ambas:

$$r\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=r\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\text{ implica }\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right).$$

Usando la regla de la cadena otra vez encontramos la segunda parcial:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\\
&=\left(\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\\
&\quad+\left(-\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}-\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)\cdot\left(\frac{-1}{r\operatorname{sen}\theta}\right)\\
&=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\\
&\quad+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.
\end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y}\\
&=\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\cdot\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{r\cos\theta}\right)\cdot\left(-\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}-\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\\
&=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\\
&\quad+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}.
\end{aligned}$$

Sumamos y eliminamos términos. Obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right).$$

Pero como $\nabla^2 u=0$, esto se reduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$$

3.R Ejercicios de repaso del capítulo 3

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (b) La divergencia es $\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial y/\partial x + \partial z/\partial y + \partial x/\partial z = 0$.

2. (b) El rotacional es

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & z & x \end{vmatrix}$$
$$= \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial x}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$
$$= -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

4 (b) Calculamos $\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2x + 2y + 2z$. También,

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2)\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2)\right]\mathbf{k}$$
$$= \mathbf{0}.$$

5. (b) El vector velocidad es $\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\sigma}'(t) = 2t\mathbf{i} + (-2t\operatorname{sen}(t^2))\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}$. El vector aceleración es $\mathbf{a}(t) = \boldsymbol{\sigma}''(t) = 2\mathbf{i} + [-2\operatorname{sen}(t^2) - 4t^2\cos(t^2)]\mathbf{j} + 12t^2\mathbf{k}$. Cuando $t = \sqrt{\pi}$, tenemos $\mathbf{v}(\sqrt{\pi}) = 2\sqrt{\pi}\mathbf{i} + 4\pi\sqrt{\pi}\mathbf{k}$ y $\mathbf{a}(\sqrt{\pi}) = 2\mathbf{i} - 4\pi\mathbf{j} + 12\pi\mathbf{k}$. La rapidez es la longitud del vector velocidad. Cuando $t = \sqrt{\pi}$, la rapidez es $[4\pi + 16\pi^3]^{1/2} = 2\sqrt{\pi + 4\pi^3}$. La ecuación de la recta tangente está dada por $\mathbf{l}(t) = \boldsymbol{\sigma}(\sqrt{(\pi)}) + t\mathbf{v}(\sqrt{\pi}) = (\pi - 1, -1, \pi^2) + t(2\sqrt{\pi}, 0, 4\pi\sqrt{\pi})$.

9. Utilizamos la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\boldsymbol{\sigma}''$. Aquí, $\boldsymbol{\sigma}'' = (2, -\operatorname{sen} t, -\cos t)$. Con $t = 0$, $\mathbf{a}(0) = (2, 0, -1)$, así, $\mathbf{F}(0) = m(2, 0, -1)$.

11. Cuando $t = \pi$, la partícula se encuentra en $(\pi, \pi^2, -\pi)$. En este punto, el vector velocidad es $\mathbf{v}(t) = \mathbf{c}'(t) = (1, 2t, \cos t - t\operatorname{sen} t)$, el cual es $(1, 2\pi, -1)$ en $t = \pi$. La ecuación de la recta tangente es $\mathbf{l}(\lambda) = (\pi, \pi^2, -\pi) + \lambda(1, 2\pi, -1)$. Sustituimos $\lambda = \pi$ para localizar la partícula ya que $\Delta t = 2\pi - \pi = \pi$. En $t = 2\pi$, la partícula se encuentra en $(2\pi, 3\pi^2 - 2\pi)$.

15. Queremos mostrar que $\boldsymbol{\sigma}'(t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t))$. Aquí, $x = 1/(1-t)$, $y = 0$, y $z = e^t/(1-t)$. Obtenemos $dx/dt = 1/(1-t)^2$, $dy/dt = 0$, y $dz/dt = (2e^t - te^t)/(1-t)^2$. Por lo tanto, $dx/dt = x^2$, $dy/dt = 0$, y $dz/dt = z(1+x) = [e^t/(1-t)][1 + 1/(1-t)] = (2e^t - te^t)/(1-t)^2$.

16. De $x^2 = y^3 = z^5$, obtenemos $y = x^{2/3}$ y $z = x^{2/5}$. Sea $x = t$, la trayectoria de la curva es $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t, t^{2/3}, t^{2/5})$. Aquí, tenemos $1 \le t \le 4$ y $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (1, (2/3)t^{-1/3}, (2/5)t^{-3/5})$ La longitud de arco es

$$\int_1^4 \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| dt = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{4}{9}t^{-2/3} + \frac{4}{25}t^{-6/5}} dt.$$

CAPÍTULO 4
DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR; MÁXIMOS Y MÍNIMOS

4.1 Teorema de Taylor

OBJETIVOS

1. Calcular los primeros términos de una fórmula de Taylor para una función dada.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Notación.* El símbolo de suma
$$\sum_{i,j=1}^{n}$$
significa que se suman todas las posibles combinaciones de (i, j), donde i y j varían de 1 a 3, es decir, $(i, j) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$ y $(3, 3)$. En general, si se suman m índices de 1 a n, habrá n^m sumandos; en nuestro caso son $3^2 = 9$ sumandos.

2. *Repaso.* Antes de continuar, tal vez te convenga repasar la fórmula de Taylor en tu libro de cálculo de una variable. Recuerda que la fórmula de Taylor se puede usar para aproximar valores de funciones.

3. *Fórmula de Taylor.* Debes aprender el patrón general de la fórmula. Recordemos que la fórmula de Taylor es
$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$$
$$+ \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n} h_i h_j h_k \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0) + \cdots .$$
El segundo término, que contiene las derivadas parciales de segundo orden, será de gran importancia en las secciones siguientes. El término que contiene las parciales

de tercer orden consta de 3^n sumandos, de manera que puede resultar poco razonable todos esos términos a menos que $n = 2$.

4. *Cómo calcular la fórmula de Taylor.* Recuerda que es necesario calcular *todas* las derivadas parciales del mismo orden. Por ejemplo, cuando se calculan las segundas parciales se debe calcular

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

así como *todas* las parciales mixtas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}, \qquad \text{etcétera.}$$

Observa que no es necesario calcular $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$, $i \neq j$ dos veces porque las derivadas parciales mixtas son iguales.

5. *Residuo de la fórmula de Taylor.* Recordemos que en cálculo de una variable el residuo está determinado por algún punto entre x_0 y $x_0 + h$. Ahora, el residuo está determinado por algún punto sobre la *recta* que une a los puntos $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$, donde $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. Recuerda que la formula de Taylor es un polinomio que aproxima a una función. Si nuestra función es un polinomio, esta función debe ser igual a su serie de Taylor. Por lo tanto, la fórmula de Taylor de segundo orden de f es

$$f(h_1, h_2) = (h_1 + h_2)^2 = h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2 \quad \text{en} \quad x_0 = 0, y_0 = 0.$$

De manera alternativa,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x + y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

En $(0, 0)$, $f(x, y)$ y todas las parciales de primer orden son iguales a 0, y todas las parciales de segundo orden son iguales a 2. Así, la aproximación de Taylor es $(1/2)(2)(h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2) = (h_1 + h_2)^2$.

5. Aquí, $f(0, 0) = 1$, $f_x = y\cos xy - y \operatorname{sen} xy$, $f_y = x\cos xy - x \operatorname{sen} xy$, $f_{xx} = -y^2 \operatorname{sen} xy - y^2 \cos xy$, $f_{xy} = f_{yx} = \cos xy - xy \operatorname{sen} xy - \operatorname{sen} xy - xy\cos xy$, y $f_{yy} = -x^2 \operatorname{sen} xy - x^2 \cos xy$. En $(0, 0)$, tenemos $f_x = f_y = f_{xx} = f_{yy} = 0$ y $f_{xy} = 1$. Entonces la serie de Taylor es:

$$f(h_1, h_2) = 1 + 0h_1 + 0h_2 + (1/2)(0h_1^2 + 2h_1h_2 + 0h_2^2) = 1 + h_1h_2 + R_2(h, 0).$$

7. (b) Para $x > 0$ y $x < 0$, $f(x) = \exp(-1/x)$ es infinitamente diferenciable. Para $x = 0$, debemos usar la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(-1/x)}{x}.$$

Sea $u = 1/x$. Debemos mostrar que $\lim_{u\to\infty} u\exp(-u) = 0$. Por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{u\to\infty} ue^{-u} = \lim_{u\to\infty} \left(\frac{u}{e^u}\right) = \lim_{u\to\infty} \left(\frac{1}{e^u}\right) = 0.$$

En general,

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2}\exp\left(\frac{-1}{x}\right), f^{(3)}(x) = \left(\frac{-2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)\exp\left(\frac{-1}{x}\right),$$

así, si podemos mostrar que el $\lim_{u\to\infty} u^n e^{-u} = 0$ para toda n, entonces podemos concluir que f es C^∞ en $x = 0$. Otra vez usamos la regla de l'Hopital n veces:

$$\lim_{u\to\infty} u^n e^{-u} = \lim_{u\to\infty} \frac{u^n}{e^u} = \ldots = \lim_{u\to\infty} \frac{n!}{e^u} = 0.$$

Así, f es C^∞, con todas las derivadas iguales a 0 en $x = 0$. Ahora, $f(0 + h) = \exp(-1/h) > 0$, pero

$$f(0) + f'(0)h + \ldots + \frac{f^k(0)}{k!}h^k = 0.$$

Entonces f no es analítica.

4.2 Extremos de funciones con valores reales

OBJETIVOS

1. Poder encontrar los puntos críticos de una función real de dos variables.

2. Saber usar el hessiano para clasificar los puntos críticos de una función.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Definiciones.* (a) Un extremo local o relativo es un punto $\mathbf{x}_0$ donde $f(\mathbf{x}_0)$ es el valor más grande o más pequeño en una *vecindad* de $\mathbf{x}_0$.
   (b) Un extremo absoluto es un punto $\mathbf{x}_0$ donde $f(\mathbf{x}_0)$ es el valor más grande o más pequeño en el dominio entero.
   (c) Los puntos críticos aparecen cuando *todas* las derivadas parciales son cero.
   (d) Un punto silla es un punto crítico que *no* es un extremo local.

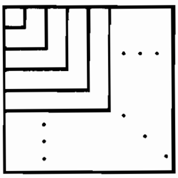
2. *Relaciones entre puntos críticos valores extremos.* Todos los valores extremos se presentan en puntos críticos, pero no todos los puntos críticos son extremos. Los puntos críticos también pueden ser puntos silla.

3. *Funciones de valores reales.* Advierte que estamos comparando valores de funciones reales, *no* valores de funciones vectoriales.

4. *Cómo encontrar extremos.* Si $\partial f/\partial x = 0$ y $\partial f/\partial y = 0$ tienen más de una solución, se debe considerar cada combinación de (x, y) que satisfaga las condiciones. Debes hacer análisis completos. Consulta el ejemplo 7.

5. *Hessiano.* Se denota con $Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})$ y es igual al segundo término de la fórmula de Taylor, el cual es
$$\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0).$$

6. *Cómo determinar el tipo de definitividad.* Para determinar el tipo de definitividad necesitamos conocer los determinantes de las submatrices diagonales de la matriz hessiana. Debemos calcular los determinantes comenzando desde la esquina superior izquierda, es decir, a_{11}. Si todos son positivos, entonces el hessiano es definitivamente positivo. Si $a_{11} < 0$ y los signos alternan, entonces el hessiano es definitivamente negativo. Observa que este criterio incluye el del teorema 5.



7. *Utilidad del hessiano.* En un punto crítico todas las derivadas parciales de primer orden son cero, por tanto la fórmula de Taylor se reduce a
$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \text{hessiano} + \text{residuo},$$
donde el residuo es pequeño comparado con el hessiano. Así, si $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definitivamente positiva, entonces
$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \text{hessiano} + \text{residuo}, < f(\mathbf{x}_0),$$

en consecuencia, $f(\mathbf{x}_0)$ es un mínimo relativo. De manera similar, si $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definitivamente negativa, entonces

$$f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x}_0) + \text{hessiano},$$

y $f(\mathbf{x}_0)$ es un máximo relativo.

8. *Clasificación de puntos críticos.* (a) Si $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definitivamente positiva, entonces $\mathbf{x}_0$ es un mínimo local.
   (b) Si $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definitivamente negativa, entonces $\mathbf{x}_0$ es un máximo local.
   (c) Si $Hf(\mathbf{x}_0)$ no satisface (a) o (b) y no todas las submatrices son cero, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto silla.

9. *Cómo encontrar la distancia mínima.* El ejemplo 7 muestra cómo encontrar una distancia mínima analizando d^2. Esto se justifica mediante la regla de la cadena. Si derivamos d^2, la regla de la cadena nos da $2d(\partial d/\partial x)$ y $2d(\partial d/\partial y)$, de manera que estamos resolviendo otra vez $\partial d/\partial x = 0$ y $\partial d/\partial y = 0$. Como $d \geq 0$, el máximo (o mínimo) de d^2 será el máximo (o mínimo) de d.

10. *Cómo garantizar extremos absolutos.* Si en $\mathbf{R}^n$ tenemos un dominio cerrado y acotado y f es continua en dicho dominio, entonces existen un mínimo absoluto y un máximo absoluto. Las tres condiciones son necesarias. Piensa qué ocurre si el dominio no es cerrado, si el dominio no es acotado o si f no es continua. Compara esto con el teorema sobre valores extremos del cálculo de una variable.

11. *Localización de extremos en la frontera.* En esta sección se parametriza la frontera de la región dada y se deriva para determinar los puntos máximos y mínimos. En la sección siguiente se estudia otro método.

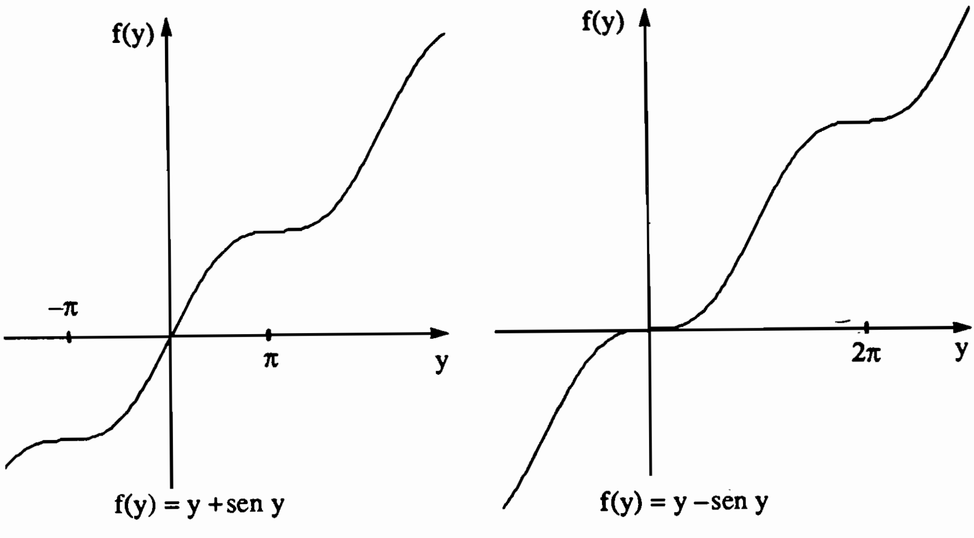
SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

3. Calculamos las parciales $\partial f/\partial x = 2x + 2y$, y $\partial f/\partial y = 2y + 2x$. Estas parciales son cero en los puntos $x = -y$, por tanto, éstos son los puntos críticos. Como $f(x, y) = (x + y)^2 \geq 0$ para toda (x, y), los extremos deben ser mínimos.

5. Por la regla de la cadena, $\partial f/\partial x = 2x \exp(1+x^2-y^2)$ y $\partial f/\partial y = -2y \exp(1+x^2-y^2)$. Si igualamos las parciales a 0, encontramos que $(0, 0)$ es el único punto crítico. Para clasificar los puntos críticos, recordemos que la función exponencial es monótoma (ésta es creciente o decreciente). Viendo la función a lo largo del eje x, evaluamos $y = 0$ para obtener $f(x, 0) = \exp(1 + x^2)$. En consecuencia, $x = 0$ es obviamente un mínimo. Si vemos la función a lo largo del eje y, evaluamos $x = 0$ para obtener $f(0, y) = \exp(1 - y^2)$. El lector se convencerá de que en $y = 0$ hay un máximo. Entonces concluimos que $(0, 0)$ es un punto silla.

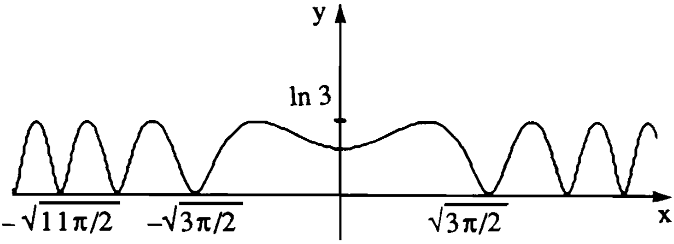
9. En $(0, 0)$, $\cos(x^2+y^2) = 1$. La función coseno es menor o igual que 1, así $(0, 0)$ es un máximo. En $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$, $\cos(x^2+y^2) = \cos(\pi) = -1$, por tanto hay un mínimo, ya que la función coseno no es menor que -1. Ahora consideremos el punto crítico $(0, \sqrt{\pi})$. Calculamos $\cos(x^2 + y^2) = -1$, así, este punto crítico también es un mínimo. Nota: este ejercicio no se puede hacer usando el criterio del discriminante (teorema 5).

10. Las derivadas parciales son $\partial f/\partial x = \operatorname{sen} y$ y $\partial f/\partial y = 1 + x\cos y$. Igualando éstos a 0, vemos que los puntos críticos son $(-1, 2n\pi)$ y $(1, (2n + 1)\pi)$, donde n es un entero. Como $\partial^2 f/\partial x^2 = 0$, no podemos usar el criterio de la segunda derivada. Consideremos el caso cuando $x = 1$. Nuestra función se convierte en $f(y) = y + \operatorname{sen} y$. La gráfica de $f(y)$ muestra que hay un punto de inflexión ahí cuando $y = (2n + 1)\pi$. Entonces, concluimos que el punto $(1, (2n+1)\pi)$ es un punto silla, ya que a lo largo de la recta $x = 1$, el punto crítico no es ni máximo ni mínimo. De manera similar, si $x = -1$, entonces $f(y) = y - \operatorname{sen} y$ tiene sus puntos de inflexión en $y = 2n\pi$. Por consiguiente, los puntos críticos $(-1, 2n\pi)$ son también puntos de inflexión.

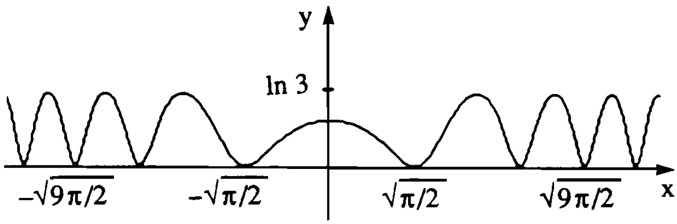


14. Primero calculamos $\partial f/\partial x = (y\cos xy)/(2 + \operatorname{sen} xy)$ y $\partial f/\partial y = (x\cos xy)/(2 + \operatorname{sen} xy)$. Como el denominador está entre 1 y 3, sólo necesitamos resolver $y\cos xy = 0$ y $x\cos xy = 0$. De $y\cos xy = 0$ obtenemos $y = 0$ o $xy = (2n + 1)\pi/2$, donde n es un entero. De $x\cos xy = 0$ obtenemos una solución adicional $x = 0$. Para clasificar los extremos, observamos $f(x, y)$. Como $-1 \leq \operatorname{sen} xy \leq 1$, tenemos $\ln(1) \leq f(x, y) \leq \ln(3)$. Así, cuando $xy = -3\pi/2, \pi/2, \ldots, (4n + 1)\pi/2$, tenemos $f(x, y) = \ln(3)$ y estos puntos son máximos locales. De manera similar, cuando $xy = -\pi/2, 3\pi/27\pi/2, \ldots, (4n + 3)\pi/2$, tenemos $f(x, y) = \ln(1)$ y también mínimos locales. Ahora observemos $(x, y) = (0, 0)$. Si $x = y$, entonces $\ln(2 + \operatorname{sen} x^2)$

tiene un mínimo cuando $x = y = 0$. Por otro lado, cuando $x = -y$, tenemos $\ln(2 + \operatorname{sen}(-x^2)) = \ln(2 - \operatorname{sen} x^2)$, el cual tiene un máximo en $x = y = 0$. Entonces, el punto $(0, 0)$ es un punto silla (véanse las siguientes figuras).



$z = \ln(2 + \operatorname{sen} x^2)$



$z = \ln(2 - \operatorname{sen} x^2)$

17. (a) Calculamos las parciales: $\partial f/\partial x = -6x(y-x^2)-2x(y-3x^2)$ y $\partial f/\partial y = (y-x^2)+(y-3x^2)$. Igualando $\partial f/\partial y$ a 0, obtenemos $2y-4x^2 = 0$, lo cual implica $y = 2x^2$. La sustitución $\partial f/\partial x$ da $-6x(2x^2 - x^2) - 2x(2x^2 - 3x^2) = -6x^3 + 2x^3 = 0$, lo cual implica que $x = 0$ y en consecuencia $y = 0$. Entonces, $(0, 0)$ es un punto crítico.

    (b) Sea $g(t) = (at, bt)$. Entonces $f(g(t)) = (bt - 3a^2t^2)(bt - a^2t^2) = b^2t^2 - 4a^2bt^3 + 3a^4t^4$. Diferenciando obtenemos $f'(g(t)) = 2tb^2 - 12a^2bt^2 + 12a^4t^3 = t(2b^2 - 12a^2bt + 12a^4t^2)$ lo que implica que $t = 0$ es una de las soluciones. La segunda derivada es $f''(t) = 2b^2 - 24a^2bt + 36a^4t^2$ y $f''(0) = 2b^2 \geq 0$, independientemente de b (o a), excepto, posiblemente en $b = 0$. Para $b = 0$, $f(g(t)) = 3a^4t^4$, y tiene un mínimo en $t = 0$. Por tanto, en $t = 0$ hay un mínimo relativo de $f(t)$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen.

    (c) Observemos la parábola $y = 2x^2$. Entonces $f(x, y) = (-x^2)(x^2) = -x^4 < 0$. Así, para esta dirección particular, $f(0, 0)$ tiene un máximo.

21. Dado un volumen V, supongamos que las dimensiones son $x \times y \times z$, entonces $V = xyz$ y el área de superficie es $S = 2xy + 2yz + 2xz$. Queremos minimizar S. Despejando z tenemos $z = V/xy$. Entonces $S = 2xy + 2V/x + 2V/y$. Tomando parciales obtenemos,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2y - 2V(1/x^2) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 2x - 2V(1/y^2). \tag{2}$$

Si igualamos (1) a 0, obtenemos $y = V/x^2$. Sustituimos esto en (2) e igualamos a 0; $2x - 2V/(Vx^2)^2 = 0$, que es equivalente a $x - x^4/V = 0$ o $x^3 = V$ o $x = V^{1/3}$. Entonces $y = V/x^2 = V/V^{2/3} = V^{1/3}$ y $z = V/xy = V/(V^{1/3}V^{1/3}) = V^{1/3}$. Todas estas dimensiones son iguales y por lo tanto, la caja es un cubo.

26. Calculamos las derivadas parciales: $\partial f/\partial y = anx^{n-1}$ y $\partial f/\partial y = cny^{n-1}$. Si las igualamos a 0, vemos que el punto crítico es $(0, 0)$. Las derivadas parciales de segundo orden son $\partial^2 f/\partial x^2 = n(n-1)ax^{n-2}$, $\partial^2 f/\partial y^2 = n(n-1)cy^{n-2}$ y $\partial^2 f/\partial x\partial y = 0$. Por el criterio de la segunda derivada llegamos a la conclusión de que el origen es un máximo si a y c son negativos y n es par. El origen es un mínimo si a y c son positivos y n es par. Para los demás casos, tenemos un punto silla en el origen.

29. Queremos encontrar los puntos extremos en el disco. Primero verificamos si algún extremo está en el interior del disco. Calculamos las parciales de f y las igualamos a 0:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x = 0.$$

De manera que $(x, y) = (0, 0)$ es un extremo relativo y $f(0, 0) = 0$. En la frontera tomamos $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$. Entonces $f(x, y) = f(\theta) = 1 + \operatorname{sen}\theta\cos\theta$. Derivamos y obtenemos $f'(\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$. De la ecuación $f(\theta) = 0$ obtenemos $\cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$, lo cual significa que $\theta = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ o $7\pi/4$ sobre el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Para $\theta = \pi/4$, $f(x, y) = f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 1/2 + 1/2 + 1/2 = 3/2$; para $\theta = 3\pi/4$, $f(x, y) = f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 1/2 - 1/2 + 1/2 = 1/2$; para $\theta = 5\pi/4, f(x, y) = f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = 1/2 + 1/2 + 1/2 = 3/2$ y para $\theta = 7\pi/4$, $f(x, y) = f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 1/2 - 1/2 + 1/2 = 1/2$. Por lo tanto, los máximos absolutos se dan en $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ con un valor máximo de $3/2$ y el mínimo absoluto está en $(0, 0)$ con un valor mínimo de 0.

32. En primer lugar, siempre debemos buscar extremos en el interior de la región. Igualamos las derivadas parciales a 0: $\partial f/\partial x = y = 0$ y $\partial f/\partial y = x = 0$. De manera que $(0, 0)$ es un extremo relativo y en $(0, 0)$, $f(x, y) = 0$. Sin embargo, no hemos buscado en los puntos de la frontera. Para el segmento de recta en $y = 1$, tenemos $-1 \leq x \leq 1$. En este segmento de recta $f(x, y) = 1 \cdot x = x$, por consiguiente, el mínimo en este segmento se da en $(1, -1)$ y el máximo, en $(1, 1)$. Los otros tres segmentos de recta se pueden analizar de manera similar. En consecuencia, en dos de las esquinas, en $(1, 1)$ y $(-1, -1)$, $f(x, y) = 1$. En las otras dos esquinas $f(x, y) = -1$. Por lo tanto, $(0, 0)$ no es un extremo absoluto; el máximo está en $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ y el mínimo está en $(1, -1)$ y $(-1, 1)$.

37. Supongamos que $\nabla^2 u = 0$ y u alcanza su mínimo en $D/\partial D$. Sea $u_n(x, y) = u(x, y) - (1/n)e^x$, entonces $\nabla^2 u_n = -(1/n)e^x < 0$. Entonces, u_n es estricamente superarmónica y por el ejercicio 34 sólo podemos tener un mínimo en ∂D, digamos que en $\mathbf{p}_n(x_n, y_n)$. Tenemos $u_n(x_n, y_n) = u(x_n, y_n) - (1/n)\exp(x_n) \leq u(x_n, y_n) - e^1/n$ porque toda $x_n \leq 1$ en ∂D. Si (x_0, y_0) es un punto en D entonces $u_n(x_0, y_0) > u_n(x_n, y_n)$, o

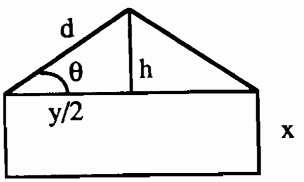
$$u(x_0, y_0) - e/n > u(x_n, y_n) - e/n.$$

Si examinamos el lado izquierdo hacia arriba (como $e/n > 0$), tenemos

$$u(x_0, y_0) > u(x_n, y_n) - e/n.$$

Como D es cerrado y acotado y $u(x, y)$ es continua, debe existir un punto $\mathbf{q} = (x_\infty, y_\infty)$ en ∂D tal que la desigualdad anterior se cumpla en una vecindad arbitrariamente pequeña de $\mathbf{q}$. Por tanto, $u(x_0, y_0) \geq u(x_\infty, y_\infty)$ y u tiene un mínimo en la frontera ∂D.

40. Primero, observa que $h = (y/2)\tan\theta$ y $d = (y/2)\sec\theta$. Entonces, queremos encontrar el valor máximo $A = xy + (1/2)yh = xy + (y^2/4)\tan\theta$. Nos dan $P = 2x + y + 2d = 2x + y + y\sec\theta$. Observa que P es una constante. Despejamos x, y obtenemos $x = (1/2)(P - y - y\sec\theta)$ y nuestra función de área se convierte en $A(y, \theta) = (Py - y^2 - y^2\sec\theta)/2 + (y^2\tan\theta)/4$. Tomando las derivadas parciales, obtenemos $\partial A/\partial y = P/2 - y - y\sec\theta + (y/2)\tan\theta$ y $\partial A/\partial\theta = (-y^2/2)\sec\theta\tan\theta + (y^2/4)\sec^2\theta = (y^2/4)\sec\theta(-2\tan\theta + \sec\theta)$. Igualando $\partial A/\partial\theta = 0$, obtenemos $y = 0$ o $2\tan\theta = \sec\theta$, es decir, $\operatorname{sen}\theta = 1/2$, es decir, $\theta = \pi/6$. La solución $y = 0$ es imposible para los problemas geométricos. Cuando $\theta = \pi/6$, tenemos $\sec\theta = 2/\sqrt{3}$ y $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$, así, $\partial A/\partial y = P/2 - y - 2y/\sqrt{3} + y/2\sqrt{3}$. Igualando $\partial A/\partial y = 0$, obtenemos



$$y = \frac{P}{2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{-1} = \frac{P\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 5}.$$

Por consiguiente, el área máxima es

$$\frac{Py - y^2 - y^2\sec\theta}{2} + \frac{y^2\tan\theta}{4},$$

donde

$$y = \frac{P\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 5} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

4.3 Extremos restringidos y multiplicadores de Lagrange

OBJETIVOS

1. Saber encontrar valores extremos si se dan una o más restricciones.

2. Poder analizar los valores críticos de una función con una o más restricciones usando el hessiano bordeado.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Notación.* La barra en $f|S$ significa "restringido a". Por ejemplo, si $g(x, y) = x + y$, entonces $g|(x = 2)$ significa que queremos considerar la función $g = 2 + y$.

2. *Método para encontrar extremos restringidos.* Éste es un método alternativo que usa las ecuaciones de (3) en lugar de las de (2). Primero replanteamos las restricciones de manera que el lado derecho sea cero; por ejemplo, $x + y = 2$ se transforma en $x + y - 2 = 0$. Luego consideramos la función $h(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda \cdot$ (restricción). Despejamos, $\partial h/\partial x_i = 0$ y $\partial h/\partial \lambda = 0$. En el ejemplo 2 analizamos $h(\mathbf{x}, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, y en el ejemplo 3, $h(\mathbf{x}, \lambda) = x + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

3. *Resolución de ecuaciones.* En general, no estamos interesados en el valor de λ; sólo en los valores de las variables. Algunas veces lo correcto es expresar λ en términos de las variables y luego eliminar λ.

4. *Advertencia.* Recuerda que todas las ecuaciones deben resolverse de manera simultánea. Resolver una sola ecuación no ayuda a encontrar un extremo.

5. *Generalización.* Si hay más de una restricción, entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{x}_0) + \cdots + \lambda_n \nabla g_n(\mathbf{x}_0)$. El lado derecho de la ecuación (2) tendrá la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \quad \text{en lugar de} \quad \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

y habrá más ecuaciones de restricción. Si prefieres usar las ecuaciones (3), sea $h(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum \lambda_i g_i(\mathbf{x})$ y resolvemos $\partial h/\partial x_j = 0$ y $\partial h/\partial \lambda_i = 0$ simultaneamente.

6. *Hessiano bordeado.* Es el hessiano con un "borde", que consta de un renglón superior adicional y una columna más en la parte izquierda. Las entradas de izquierda a derecha o de arriba hacia abajo son $0, -\partial g/\partial x_1, -\partial g/\partial x_2, \ldots, -\partial g/\partial x_n$, donde g es la restricción. Observa que todas las entradas excepto el borde son derivadas de parciales de segundo orden.

7. *Clasificación de puntos críticos.* (a) Si todas las submatrices de $n \times n$ son negativas para $n > 1$, entonces $\mathbf{x}_0$ está en un mínimo local.
   (b) Si los signos alternan: positivo, negativo, positivo, ..., comenzando con la matriz de 2×2, entonces $\mathbf{x}_0$ está en un máximo local.
   (c) Si el patrón no satisface (a) o (b) y no todas las submatrices son cero, entonces $\mathbf{x}_0$ está en un punto silla.

   Nota que el signo de las submatrices es opuesto al del criterio desarrollado en la sección anterior.

8. *Extremos en una región.* El método de los multiplicadores de Lagrange es bueno sólo para localizar extremos en una frontera. No olvides analizar los puntos críticos del interior de la región.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. Usamos el método de los multiplicadores de Lagrange. Tenemos $\nabla f(x, y, z) = (1, -1, 1)$, y la constante es $g(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$, de manera que $\lambda \nabla g(x, y, z) = \lambda(2x, 2y, 2z)$. Por tanto, $\nabla f = \lambda \nabla g$ nos da $1 = \lambda 2x$, $-1 = \lambda 2y$ y $1 = \lambda 2z$. Así tenemos $x = z = -y = 1/2\lambda$. Sustituimos esto en la constante: $(1/2\lambda)^2 + (-1/2\lambda)^2 + (1/2\lambda)^2 = 3/4\lambda^2 = 2$, o $\lambda = \pm(1/2)\sqrt{3/2}$. Para $\lambda = +(1/2)\sqrt{3}/2$, tenemos $(x, y, z) = (\sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$ y para $\lambda = -(1/2)\sqrt{2/3}$, tenemos $(x, y, z) = (-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3})$. Éstos son los dos puntos extremos y el valor máximo es $\sqrt{6}$, mientras que el valor mínimo es $-\sqrt{6}$.

3. Queremos encontrar los puntos extremos de $f(x, y) = x$ sujeto a $x^2 + 2y^2 = 3$. Usamos el método de los multiplicadores de Lagrange. De la restricción, sea $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3$, de modo que $\nabla f = (1, 0)$ y $\nabla g = (2x, 4y)$. Queremos resolver simultáneamente $\nabla f = \lambda \nabla g$ y las ecuaciones de restricción:

$$1 = \lambda 2x \qquad (1)$$

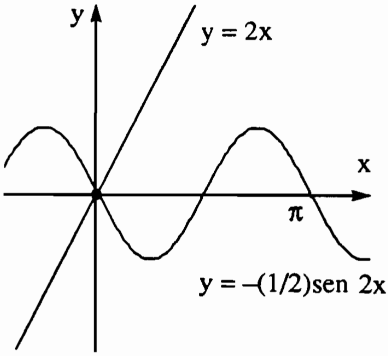
$$0 = \lambda 4y \qquad (2)$$

$$x^2 + 2y^2 = 3 \qquad (3)$$

   De (2), obtenemos $y = 0$. De (1), $x = 1/2\lambda$. Sustituimos x y y en (3), y nos da $(1/2\lambda)^2 = 3$, así $1/2\lambda = \pm\sqrt{3}$; por tanto, $x = \pm\sqrt{3}$. En $(\sqrt{3}, 0)$, $f(x) = \sqrt{3}$ y en $(-\sqrt{3}, 0)$, $f(x) = -\sqrt{3}$. Concluimos que en $(\sqrt{3}, 0)$ alcanza el máximo, y en $(-\sqrt{3}, 0)$ el mínimo.

8. En S y está restringido a ser $\cos x$, así, $f(x, y) = x^2 - y^2 = x^2 - \cos^2 x$. Aplicando el método para una variable, calculamos $f'(x) = 2x + 2\cos x \operatorname{sen} x$. La derivada es nula cuando $x = -\cos x \operatorname{sen} x = -(1/2)\operatorname{sen} 2x$. Ésta es una ecuación trascendente que se resuelve con métodos gráficos (o usando el programa HP-15C, si es que lo

tienes). Las gráficas de $y = 2x$ y $y = -\operatorname{sen} 2x/2$ se intersecan solamente en el origen, así (0, 0) es un extremo. Ya que $x^2 \geq 0$ y $0 \leq \cos^2 x \leq 1$, concluimos que (0, 0) es un mínimo.



13. Queremos minimizar el área de superficie de un cilindro sujeto a una restricción sobre el volumen. Es decir, queremos minimizar $S(r, h)2\pi rh + 2\pi r^2$ sujeto a $\pi r^2 h = 1000\ \text{cm}^3$. Usamos el método de multiplicadores de Lagrange. De la constante obtenemos $g(r, h) = \pi r^2 h - 1000$. Calculamos la siguiente derivada parcial de primer orden: $\partial S/\partial r = 2\pi h + 4\pi r$, $\partial g/\partial r = 2\pi rh$, $\partial S/\partial h = 2\pi r$, $\partial g/\partial h = \pi r^2$. Ahora queremos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2\pi h + 4\pi r = \lambda 2\pi rh \tag{1}$$

$$2\pi r = \lambda \pi r^2 \tag{2}$$

$$\pi r^2 h = 1000. \tag{3}$$

Factorizamos πr de (2) para obtener $2 = \lambda r$ o $\lambda = 2/r$. Sustituimos en (1) y factorizamos 2π, obteniendo $h + 2r = (2/r)rh = 2h$, o $h = 2r$. La sustitución en (3) nos da $\pi r^2 h = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 1000$, así, $r = 10/(2\pi)^{1/3}$ y $h = 2r = 20/(2\pi)^{1/3}$. Para verificar que el resultado satisface la constante, calculamos

$$\pi r^2 h = \pi \frac{100}{(2\pi)^{2/3}} \cdot \frac{20}{(2\pi)^{1/3}} = 1000.$$

Así, el cilindro deseado tiene una altura de $20/(2\pi)^{1/3}$ cm y radio de la base de $10/(2\pi)^{1/3}$ cm.

16. Usamos el método de los multiplicadores de Lagrange. Sea

$$f(x, y, \lambda) = x + 2y \sec\theta + \lambda(xy + y^2 \tan\theta - A).$$

Entonces $\partial f/\partial x = 1 + \lambda y$; $\partial f/\partial y = 2\sec\theta + \lambda(x + 2y\tan\theta)$; y $\partial f/\partial\lambda = xy + y^2\tan\theta - A$. De $\partial f/\partial x = 0$, obtenemos $\lambda = -1/y$; en vista de que $\partial f/\partial y = 0$, obtenemos:

$$\lambda = \frac{-2\sec\theta}{x + 2y\tan\theta}.$$

Por tanto, $2y = (x + 2y\tan\theta)/(\sec\theta)$, de manera que $2y(1 - \operatorname{sen}\theta) = x\cos\theta$. Entonces, $x = 2y(\sec\theta - \tan\theta)$. Sustituimos esto en $\partial f/\partial\lambda = 0$ para obtener $2y^2(\sec\theta - \tan\theta) + y^2\tan\theta = A$. Entonces $y^2(2\sec\theta - \tan\theta) = A$, así

$$y^2 = \frac{A}{2\sec\theta - \tan\theta} = \frac{A\cos\theta}{2 - \operatorname{sen}\theta}.$$

23. (a) Aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange sobre la función auxiliar $h(x, y, \lambda) = x + y^2 - \lambda(2x^2 + y^2 - 1)$. Calculamos las siguientes derivadas parciales:

$$h_x = 1 - 4x\lambda = 0 \tag{1}$$

$$h_y = 2y - 2y\lambda = 0 \tag{2}$$

$$h_\lambda = -(2x^2 + y^2 - 1) = 0 \tag{3}$$

De (2) obtenemos, ya sea $y = 0$ o $\lambda = 1$. Para el caso en el que $\lambda = 1$, obtenemos de (1) $x = 1/4$ y entonces de (3) $y = \pm\sqrt{7/8}$. Cuando $y = 0$, obtenemos $x = \pm 1/\sqrt{2}$ de (3). Por tanto, los puntos críticos de la función constante están localizados en $(1/4, \pm\sqrt{7/8})$ y $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$.

(b) Usamos la restricción $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 1$, por consiguiente, $h(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$. Entonces el hessiano bordeado es (teorema 9)

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -\partial g/\partial y & -\partial g/\partial y \\ -\partial g/\partial x & \partial^2 h/\partial x^2 & \partial^2 h/\partial y\partial x \\ -\partial g/\partial y & \partial^2 h/\partial x\partial y & \partial^2 h/\partial y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4x & -2y \\ -4x & -4\lambda & 0 \\ -2y & 0 & 2 - 2\lambda \end{vmatrix}$$

En $(x, y, \lambda) = (1/4, \sqrt{7/8}, 1)$ tenemos

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -\sqrt{7/2} \\ -1 & -4 & 0 \\ -\sqrt{7/2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 14 > 0,$$

así $(x, y) = (1/4, \sqrt{7/8})$ es un punto máximo relativo. En el punto $(x, y, \lambda) = (1/4, -\sqrt{7/8}, 1)$, tenemos

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -\sqrt{7/2} \\ -1 & -4 & 0 \\ \sqrt{7/2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 14 > 0,$$

en consecuencia $(x, y) = (1/4, -\sqrt{7/8})$ es un punto máximo relativo. Cuando $(x, y) = (1/\sqrt{2}, 0)$, la ecuación (1) anterior nos dice que $\lambda = -\sqrt{1/8}$, así en el punto $(x, y, \lambda) = (1/\sqrt{2}, 0, -\sqrt{1/8})$, tenemos

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{8} & 0 \\ -\sqrt{8} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 + \sqrt{2} \end{vmatrix} = (2 + \sqrt{2})(-8) < 0.$$

Entonces, $(1/\sqrt{2}, 0)$ es un mínimo relativo. De manera similar, cuando $(x, y) = (-1/\sqrt{2}, 0)$, $\lambda = +\sqrt{1/8}$, por tanto, en el punto $(x, y, \lambda) = (-1/\sqrt{2}, 0, \sqrt{1/8})$, tenemos

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{8} & 0 \\ \sqrt{8} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{vmatrix} = (2-\sqrt{2})(-8) < 0.$$

Entonces, $(-1/\sqrt{2}, 0)$ es un mínimo relativo. Si evaluamos la función en los puntos críticos, vemos que $(1/4, \pm\sqrt{7/8})$ son máximos absolutos, $(-1/\sqrt{2}, 0)$ es un mínimo absoluto y $(1/\sqrt{2}, 0)$ es el único mínimo relativo.

4.4 Teorema de la función implícita

OBJETIVOS

1. Poder determinar si existe la inversa de una función cerca de un punto $\mathbf{x}$.

2. Si la inversa existe, poder encontrar una derivada mediante métodos implícitos.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Material avanzado.* Los teoremas que se presentan en esta sección se suelen demostrar en cursos más avanzados. Debes preocuparte por entender los enunciados de dichos teoremas.

2. *Notación.* $\mathbf{D}_\mathbf{x}F$ se usa en esta sección, es sólo otra notación para ∇F con respecto a $\mathbf{x}$.

3. *Teoremas locales.* Los teoremas de esta sección pueden no ser aplicables si el rango o dominio es muy grande.

4. *Teorema particular de la función implícita.* Si $\partial F/\partial z \neq 0$, z se puede expresar en términos de $\mathbf{x}$ en un punto dado $(\mathbf{x}_0, z_0)$ y la derivada de $z = g(\mathbf{x})$ es

$$\mathbf{D} = \frac{-\mathbf{D}_\mathbf{x}F(\mathbf{x}, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, z)}.$$

   Observa que podemos derivar z aun cuando no tenemos fórmula para z. No olvides el signo menos de la derivada.

5. *Fórmulas de uso común.* Cuando z es función de x y y, obtenemos la fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial z/\partial x}{\partial z/\partial y}.$$

Casi parece una división de fracciones, excepto por el signo menos. Otra vez, no olvides el signo menos.

6. *Teorema general de la función implícita.* En general, $\mathbf{z}$ puede ser un vector. Formamos una matriz que en el renglón superior tenga las parciales de F_1 con respecto a $z_j, j = 1, \ldots, m$ (casi como un gradiente). De manera similar, los demás renglones constan de las parciales de F_k, $k = 1, \ldots, m$. si el determinante de esta matriz de $n \times m$ es diferente de cero, entonces $\mathbf{z}$ es una función de $\mathbf{x}$ y la derivada existe.

7. *Jacobiano.* Éste es el determinante de $n \times m$ que se describe en el punto 6. Se denota con $Jf(\mathbf{x}_0)$ o
$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{(x_1, \ldots, x_m)}.$$

8. *Teorema de la función inversa.* Tal como se estableció en el punto 6, si $Jf(\mathbf{x}_0) \neq 0$, entonces $\mathbf{z}$ se puede expresar en términos de $\mathbf{x}$. Tal vez no sea fácil, pero es posible.

9. *Ejemplo 3.* Éste es un problema típico. Estúdialo con cuidado. Observa que cuando se dé más de una función necesitarás resolver un sistema de ecuaciones simultáneas para encontrar una derivada parcial.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

2. Sea $F(x, y, z) = xy + z + 3xz^5 - 4$. Ya que queremos saber si podemos despejar z como función de (x, y), necesitamos saber si $\partial F/\partial z$ no se anula en el punto deseado, así, $\partial F/\partial z = 1 + 15xz^4$. Cerca de $(1, 0, 1)$, $F_z = 16 \neq 0$, en consecuencia $F = 0$ es soluble para z como función de (x, y). Por tanto,
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_z} = -\frac{y + 3z^5}{1 + 15xz^4} \quad \text{y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F_y}{F_z} = -\frac{x}{1 + 15xz^4}.$$
En $(x, y) = (1, 0)$, $z = 1$, de manera que $\partial z/\partial x = -3/16$ y $\partial z/\partial y = -1/16$.

7. Sea $F_1 = y + x + uv$ y $F_2 = uxy + v$. Queremos entonces,
$$\Delta = \begin{vmatrix} \partial F_1/\partial u & \partial F_1/\partial v \\ \partial F_2/\partial u & \partial F_2/\partial v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{en} \quad (x, y, u, v) = (0, 0, 0, 0).$$
Las entradas del determinante son $\partial F_1/\partial u = v$, $\partial F_1/\partial v = u$, $\partial F_2/\partial u = xy$ y $\partial F_2/\partial v = 1$. Observamos que en el punto $(0, 0, 0, 0)$,
$$\Delta = \begin{vmatrix} v & u \\ xy & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

por lo que no podemos despejar u, v en términos de x, y cerca de $(x, y, u, v) = (0, 0, 0, 0)$. Para verificar directamente, la primera ecuación nos da $uv = -(x + y)$, entonces $v = -(y + x)/u$. Combinando esto con la segunda ecuación obtenemos $uxy = (x+y)/u$ o $u^2 = (x+y)/xy$. Para (x, y) cerca de $(0, 0)$, o bien no hay solución para u, o bien hay 2 soluciones para u.

10. (a) Usando la definición de $\partial(x, y)/\partial(r, \theta)$ y calculando las derivadas parciales obtenemos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

En (r_0, θ_0), $r = r_0$.

(b) Por el teorema de la función inversa podemos construir una función inversa suave $(r(x, y), \theta(x, y))$ siempre y cuando $r \neq 0$. Para verificar directamente, despejamos r y θ en términos de x y y : $x^2 + y^2 = r$ y $\tan\theta = y/x$ o $\theta = \arctan(y/x)$. Como hemos escrito r y θ en términos de x y y, el resultado anterior se confirma. Observe que si $x = 0$ entonces $\theta = \pi/2$ o $3\pi/2$, dependiendo del signo de la y. Si además $y = 0$, entonces $r = 0$, y θ puede tomar cualquier valor, por lo tanto no podemos encontrar una inversa como lo hicimos anteriormente.

12. Sea $F_1 = xy^2 + xzu + yv^2 - 3$ y $F_2 = u^3yz + 2xv + u^2v^2 - 2$. Entonces $\partial F_1/\partial u = xz$, $\partial F_1/\partial v = 2yv$, $\partial F_2/\partial u = 3u^2yz - 2uv^2$, $\partial F_2/\partial v = 2x - 2u^2v$. En $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ y $(u, v) = (1, 1)$,

$$\Delta = \left|\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}\right| = \begin{vmatrix} xz & 2yv \\ 3u^2yz - 2uv^2 & 2x - 2u^2v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Como $\Delta \neq 0$, es posible despejar u y v en términos de x, y, z cerca del punto dado. Para calcular $\partial v/\partial y$, usamos la regla de la cadena:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2xy + xz\frac{\partial u}{\partial y} + v^2 + 2yv\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = 3u^2\frac{\partial u}{\partial y}yz + u^3z + 2x\frac{\partial v}{\partial y} - 2u\frac{\partial u}{\partial y}v^2 - 2v\frac{\partial v}{\partial y}u^2 = 0.$$

En $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ y $(u, v) = (1, 1)$, ambas ecuaciones se convierten en $2+\partial u/\partial y+1+2\partial v/\partial y = 0$ y $3\partial u/\partial y+1+2\partial v/\partial y-2\partial u/\partial y-2\partial v/\partial y = 0$ o $\partial u/\partial y+2\partial v/\partial y = -3$ y $\partial u/\partial y = -1$, de manera que $\partial v/\partial y = -1$.

4.5 Algunas aplicaciones

OBJETIVOS

1. Saber encontrar puntos de equilibrio y determinar su estabilidad en problemas de mecánica.

2. Poder encontrar distancias máximas y mínimas en problemas geométricos.

3. Poder explicar el significado de λ en problemas económicos.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Material opcional.* Es posible que el profesor no quiera incluir esta sección en el temario del curso. Usa tus apuntes para determinar a qué aplicaciones, si hay alguna, se le debe prestar más atención.

2. *Mecánica.* Debes conocer los siguientes hechos. Un punto de equilibrio es aquel en el que $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = 0$. Éstos son puntos críticos de un potencial V. Un punto de equilibrio es estable si es un mínimo local estricto de V. Estos hechos también son ciertos si el potencial es restringido.

3. *Geometría.* Como en el ejemplo 7, sección 4.2, podemos analizar el cuadrado de la distancia en lugar de la distancia misma.

4. *Economía.* Las isocuantas son curvas que muestran todas las combinaciones posibles de capital y trabajo que dan el *mismo resultado.* No es usual que el multiplicador de Lagrange λ tenga un significado especial. Sin embargo, en estos ejemplos, λ nos dice cuánto más se puede producir con una unidad extra de capital *o* trabajo. Observa que λ tiene significación sólo en el punto óptimo.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. El punto de equilibrio ocurre en un punto crítico. Calcula las parciales de V e iguálalas a 0:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 6x + 2y + 2 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 2x + 2y + 1 = 0. \tag{2}$$

De (1), $2y = -6x - 2$. Sustitúyelo en (2) para obtener $2x + (-6x - 2) + 1 = 0$, así $-4x = 1$ o $x = -1/4$. Entonces $y = -1/4$. Para un equilibrio *estable*, tenemos que mostrar que $(x, y) = (-1/4, -1/4)$ es un mínimo local estricto de V: las segundas parciales son $\partial^2 V/\partial x^2 = 6$ y $\partial^2 V/\partial x \partial y = \partial^2 V/\partial y \partial x = \partial^2 V/\partial y^2 = 2$. Por lo que el discriminante es

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8.$$

Como el hessiano es positivo, $(-1/4, -1/4)$ es un mínimo local.

5. Queremos minimizar $V = mgz + x + y$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Usa el método de multiplicadores de Lagrange para obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$1 = 2x\lambda \tag{1}$$

$$1 = 2y\lambda \tag{2}$$

$$mg = 2z\lambda \tag{3}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{4}$$

De (1) y (2), obtenemos $x = y = 1/2\lambda$. De (3), obtenemos $z = mg/2\lambda = mgx = mgy$. Sustituyendo en (4) tenemos $(1/2\lambda)^2 + (1/2\lambda)^2 + (mg/2\lambda)^2 = 1$ o $(1/4\lambda^2)(2 + m^2g^2) = 1$ y $\lambda^2 = (2 + m^2g^2)/4$ o $\lambda = \pm\sqrt{2 + m^2g^2}/2$. Entonces $x = \pm 1/\sqrt{2 + m^2g^2}$, $y = \pm 1/\sqrt{2 + m^2g^2}$, $z = \pm mg/\sqrt{2 + m^2g^2}$ y obtenemos dos puntos: $(1/\sqrt{2 + m^2g^2}, 1/\sqrt{2 + m^2g^2}, mg/\sqrt{2 + m^2g^2})$ y $(-1/\sqrt{2 + m^2g^2}, -1/\sqrt{2 + m^2g^2}, -mg/\sqrt{2 + m^2g^2})$. En primer lugar,

$$V = \frac{(mg)^2}{\sqrt{2 + m^2g^2}} + \frac{2}{\sqrt{2 + m^2g^2}} = \frac{2 + (mg)^2}{\sqrt{2 + m^2g^2}}.$$

En segundo lugar

$$V = \frac{-(mg)^2}{\sqrt{2 + m^2g^2}} - \frac{2}{\sqrt{2 + m^2g^2}} = -\frac{2 + (mg)^2}{\sqrt{2 + m^2g^2}}.$$

Como V es continua en la esfera unitaria, queda claro que $(-1/\sqrt{2 + m^2g^2}, -1/\sqrt{2 + m^2g^2}, -mg/\sqrt{2 + m^2g^2})$ es un punto de equilibrio estable.

8. Con una hipérbola, sólo hay una distancia mínima de un punto. Con la parábola, también sólo hay una distancia mínima. No hay distancias máximas en estas figuras geométricas, ya que ambas se extienden a lo largo del infinito.

11. Sea p el precio de la mano de obra y q el capital. Queremos optimizar Q dada la restricción $S = pL + qK = B$. Calculamos las parciales de Q y S: $\partial Q/\partial K = A\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}$, $\partial S/\partial K = q$, $\partial Q/\partial L = A(1-\alpha)L^{-\alpha}K^{\alpha}$, $\partial S/\partial L = p$. Usa el método de los multiplicadores de Lagrange para obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \lambda q \tag{1}$$

$$A(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha} = \lambda p \tag{2}$$

$$pL + qK = B. \tag{3}$$

De (1), obtenemos $q = (A/\lambda)\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}$, y de (2), obtenemos $p = (A/\lambda) \times (1 - \alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha}$. Sustituyendo en (3) nos da $(A/\lambda)(1-\alpha)K^{\alpha}L^{1-\alpha} + (A/\lambda)\alpha K^{\alpha}L^{1-\alpha} = B$ o $(A/\lambda)K^{\alpha}L^{1-\alpha} = B$ o $\lambda = (A/B)K^{\alpha}L^{1-\alpha}$. Sustituimos λ en (1) y (2):

$$A\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = (A/B)K^{\alpha}L^{1-\alpha}q \tag{4}$$

$$A(1-\alpha)K^{\alpha}L^{\alpha} = (A/B)K^{\alpha}L^{1-\alpha}p. \tag{5}$$

De (4) obtenemos $K = \alpha B/q$ y de (5), $L = (1-\alpha)B/p$. De manera que el punto

$$(K, L) = \left(\frac{\alpha B}{q}, \frac{(1-\alpha)B}{p}\right)$$

optimiza el beneficio.

4.R Ejercicios de repaso del capítulo 4

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (b) Calculamos las parciales $\partial z/\partial x = 2x + Cy$ y $\partial z/\partial y = 2y + Cx$. Vemos que $(0,0)$ es un punto crítico. Las parciales de segundo orden de z son $\partial^2 z/\partial x^2 = 2$, $\partial^2 z/\partial y^2 = 2$ y $\partial^2 z/\partial x\partial y = C$. Por el teorema 5, si $4 - C^2 > 0$ tenemos un mínimo relativo. Si $4 - C^2 = 0$, entonces $C = \pm 2$ y $z = x^2 + y^2 \pm 2xy = (x \pm y)^2 \geq 0$. En este caso z es igual a 0 si y sólo si $x = y = 0$. Por tanto, $(0,0)$ es un mínimo si $4 - C^2 = 0$. Si $4 - C^2 < 0$, entonces tenemos un punto silla. En resumen, $(0,0)$ es un mínimo local si $-2 \leq C \leq 2$; en otro caso, $(0,0)$ es un punto silla.

2. (c) Calculamos las parciales de f y las igualamos a 0:

$$f_x = 2x + y^2 = 0 \tag{1}$$

$$f_y = 2xy + 4y^3 = 0. \tag{2}$$

De (1), $y^2 = -2x$ (por tanto $x \leq 0$). Sustituimos en (2) para obtener $y(-y^2) + 4y^3 = 3y^3 = 0$ o $y = 0$. Entonces también $x = 0$ y $(0,0)$ es el punto crítico. Debes verificar que el discriminante D es 0, porque si no, no se obtiene una conclusión de este criterio. Sin embargo, $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^4 - xy^2 = (x+y^2)^2 - xy^2$, por tanto $f(x,y) > 0$ para toda $x < 0$ y para x positiva, $(x+y^2)^2 < xy^2$ implica $x^2 + y^4 < -xy^2$, pero esto es imposible porque $x^2 + y^4$ siempre es positivo y $-xy^2$ siempre es negativo. Por consiguiente, podemos concluir que el valor mínimo de $f(x,y)$ es 0, en $(0,0)$.

5. Por el teorema de multiplicadores de Lagrange obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$y\lambda$$

$$x = \lambda$$

$$x + y = 1.$$

Si sustituimos en la última ecuación nos da $2\lambda = 1$ o $\lambda = 1/2$. Entonces, $x = 1/2$ y $y = 1/2$. Sin embargo, en este caso, sería mucho más fácil despejar x y sustituir para obtener $z = x(1 - x) = x - x^2$. Por los métodos del cálculo de una variable, $x = 1/2$ es el punto crítico y el valor máximo de z sujeto a $x + y = 1$ es $1/4$.

8. (b) Por el teorema de la función implícita,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

En este caso, $F(x, y) = x^3 - \sin y + y^4 - 4 = 0$. Por tanto, $dy/dx = 3x^2/(-\cos y + 4y^3)$.

10. (c) El paralelepípedo rectangular (la caja) es simétrico, por consiguiente, si x es una coordenada de un punto (x, y, z) en la esquina de la caja, entonces la dimensión correspondiente a esa coordenada debe ser $2x$. Queremos encontrar el valor máximo de $V(x, y, z) = (2x)(2y)(2z) = 8xyz$ sujeto a $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Usamos el método de los multiplicadores de Lagrange:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2yz = 8x\lambda/a^2 \tag{1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 2xz = 8y\lambda/b^2 \tag{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2xy = 8z\lambda/c^2 \tag{3}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{4}$$

Despejamos x en (1): $x = 4a^2yz/\lambda$. Sustituimos en (2): $8(4a^2yz/\lambda)z = 2y\lambda/b^2$ o $z^2 = \lambda^2/16a^2b^2$. Sustituimos x en (3): $8(a^2y^2/\lambda)y = 2z\lambda/c^2$ o $y^2 = \lambda^2/16a^2c^2$. Entonces

$$x^2 = \frac{16a^4}{\lambda^2}y^2z^2 = \frac{16a^4}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda^2}{16a^2c^2}\right)\left(\frac{\lambda^2}{16a^2b^2}\right) = \frac{\lambda^2}{16b^2c^2}.$$

Insertamos estos resultados en (4) y obtenemos

$$\frac{\lambda^2}{16a^2b^2c^2} + \frac{\lambda^2}{16a^2b^2c^2} + \frac{\lambda^2}{16a^2b^2c^2} = 1.$$

Esto se simplifica en $3\lambda^2 = 16a^2b^2c^2$ o $\lambda^2 = 16a^2b^2c^2/3$. La sustitución de λ^2 nos da

$$x^2y^2z^2 = \frac{a^3}{3} \cdot \frac{b^3}{3} \cdot \frac{c^3}{3} = \frac{a^2b^2c^2}{27},$$

o $xyz = abc/3\sqrt{3}$. Por tanto, el volumen máximo es

$$V = 8xyz = 8 \cdot \frac{abc}{3\sqrt{3}} = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}.$$

14. Primero buscamos extremos en el interior del círculo de radio $\sqrt{2}$. Tenemos $f(x, y) = xy - y + x - 1$, de manera que igualamos sus derivadas parciales a 0. Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - 1,$$

por consiguiente, $(-1, 1)$ es un extremo. Como $(-1)^2+(1)^2 = 1$, este punto satisface la restricción y $f(-1, 1) = -4$. Para encontrar otros extremos (si los hay), usamos el método de multiplicadores de Lagrange:

$$y + 1 = 2x\lambda \tag{1}$$

$$x - 1 = 2y\lambda \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 = 2 \tag{3}$$

De (1) y (2) obtenemos $\lambda = (y+1)/2x$ y $\lambda = (x-1)/2y$. Los igualamos, eliminamos fracciones, simplificamos y obtenemos

$$y^2 - x^2 + y + x = 0. \tag{4}$$

De (3), $y^2 = 2 - x^2$. Si sustituimos en (4), obtenemos, $2 - x^2 - x^2 + y + x = 0$ o $y = 2x^2 - x - 2$. Sustituimos y en (3): $(2x^2 - x^2 - 2)^2 + x^2 = 2$. Esto se simplifica en $2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$ y si factorizamos nos da $2x^2(x^2-1) - 2x(x^2-1) - (x^2-1) = 0$ o $(2x^2 - 2x + 1)(x^2 - 1) = 0$. Debes verificar, que $x = \pm 1$ son las únicas soluciones reales. Por tanto, los extremos son $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ y $(-1, -1)$. Calculamos $f(1, 1) = f(1, -1) = f(-1, -1) = 0$ y $f(-1, 1) = -4$. Entonces los puntos máximos son $(1, 1)$, $(-1, -1)$ y $(1, -1)$ con valor máximo de 0. El punto mínimo es $(-1, 1)$, con valor mínimo de -4. [Nota: este problema ilustra un caso raro en el cual un extremo "interior" coincide con uno en la frontera; en la práctica debemos buscar *siempre* extremos en el interior.]

17. Usamos el teorema de la función implícita. Necesitamos demostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} \partial F/\partial u & \partial F/\partial v \\ \partial G/\partial u & \partial G/\partial v \end{vmatrix}$$

no es 0 cerca de $(x, y, u, v) = (2, -1, 2, 1)$. El determinante es

$$\begin{vmatrix} -3u^2 & 2v \\ -4u & 12u^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} = -144 + 16 \neq 0.$$

Como el determinante no es 0, u y v se pueden expresar como funciones de x y y. Para calcular $\partial u/\partial x$ derivamos las ecuaciones dadas de manera implícita con respecto a x. Recuerda que u y v son funciones de x y de y. Obtenemos

$$2x - 3u^2\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$2y - 4u\frac{\partial u}{\partial x} + 12v^3\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Con objeto de hacer los cálculos más sencillos, tomamos en cuenta que $(x, y, u, v) = (2, -1, 2, 1)$. Entonces

$$4 - 12\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$-2 - 8\frac{\partial u}{\partial x} + 12\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Resuelve este sistema de dos ecuaciones mediante tu método favorito. Debes obtener $\partial u/\partial x = 13/32$.

22. (a) Usando la fórmula dada, planteamos $s = f(m, b) = (1 - 1 \cdot m - b)^2 + (3 - 2m - b)^2 + (3 - 4m - b)^2 = 19 - (46m + 16b) + \left((m + b)^2 + (2m + b)^2 + (4m + b)^2\right)$. El problema es encontrar m y b y que den el valor mínimo de $f(m, b)$, entonces derivemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial m} &= -46 + 2(m + b) + 4(2m + b) + 8(4m + b)\\ &= -46 + 42m + 14b,\end{aligned}$$

y

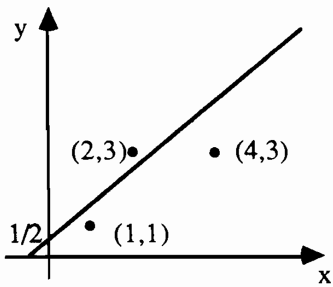
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial b} &= -16 + 2(2m + b) + 2(4m + b)\\ &= -16 + 14m + 6b.\end{aligned}$$

Ahora los igualamos a 0:

$$-46 + 42m + 14b = 0$$
$$-16 + 14m + 6b = 0.$$

Resolvemos este sistema de dos ecuaciones, obtenemos $b = 1/2$, $m = 13/14$. Conviene que el lector verifique que éste es, en efecto, un punto mínimo. Por

tanto, la recta que mejor se ajusta a los puntos (1, 1), (2, 3), (4, 3) es $y = 13x/14 + 1/2$, como se muestra en la gráfica siguiente.



25. Si $y = mx + b$ es la recta de mejor ajuste, debemos tener, en particular,

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)^2\right) = 0.$$

Si derivamos obtenemos

$$-2\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b) = 0.$$

lo cual implica que la suma debe ser 0, o que las desviaciones positivas y negativas se eliminan.

CAPÍTULO 5
INTEGRALES DOBLES

5.1 Introducción

OBJETIVOS

1. Poder calcular integrales dobles sobre rectángulos.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Notación.* (a) El producto cartesiano de dos intervalos es un rectángulo en $\mathbf{R}^2$. $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ si y sólo si $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$.
   (b) Algunas veces $dx\,dy$ o $dy\,dx$ se abrevia dA.

2. *Repaso.* Antes de continuar debes repasar técnicas de integración para una variable. Es importante que recuerdes cómo integrar por partes y por sustitución.

3. *Interpretación geométrica.* Si $f(x, y) \geq 0$, entonces la integral doble $\iint_D f(x, y)\,dA$ es el volumen por debajo de la superficie definida por la gráfica de $z = f(x, y)$. Recuerda que en el caso de una variable $\int f(x)\,dx$ era el área situada bajo la curva $y = f(x)$.

4. *Cómo calcular una integral doble.* De la misma manera que con las derivadas parciales, todas las variables excepto una se mantienen constantes en cada paso. Integramos el interior y trabajamos hacia afuera. Por ejemplo,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b \big[F(x, d) - F(x, c)\big]\,dx,$$

   donde F es una antiderivada de f cuando x se mantiene constante. Ahora, calculamos la integral usando métodos de una variable.

5. *Principio de Cavalieri.* Se utiliza en la mayoría de los cursos de una variable para deducir fórmulas de volumen. Algunas veces se llama a estas fórmulas método de rebanadas o secciones transversales.

6. *Sumas de Riemann.* Recuerda que en la suma

$$\sum_{i=0}^{n} f(c_i)(x_{i+1} - x_i),$$

c_i puede tomar *cualquier* valor en $[x_{i+1}, x_i]$. En una suma de Riemann tomamos el límite cuando $n \to \infty$, por lo cual, en la mayoría de los casos, $f(c_i)$ es casi independiente de c_i porque x_{i+1} y x_i suelen estar cerca.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (b) Primero mantenemos x constante e integramos con respecto a y, luego integramos con respecto a x:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (y\cos x + 2)\,dy\,dx &= \int_0^{\pi/2}\left[\left(\frac{y^2}{2}\cos x + 2y\right)\Big|_{y=0}^{1}\right]dx \\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}\cos x + 2\right)dx = \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + 2x\right)\Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} + \pi.\end{aligned}$$

2. (b) Veremos más adelante, en este capítulo, que podemos cambiar fácilmente el orden de integración porque la región es un rectángulo. Entonces, primero mantenemos constante y e integramos con respecto a x:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{\pi/2} (y\cos x + 2)\,dy\,dx &= \int_0^1\left[(y\operatorname{sen} x + 2x)\Big|_{x=0}^{\pi/2}\right]dy \\ &= \int_0^1 (y + \pi)\,dy = \left(\frac{y^2}{2} + \pi y\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \pi.\end{aligned}$$

Como se esperaba, se obtiene el mismo resultado independientemente del orden de integración.

3. Por el principio de Cavalieri, el volumen de un sólido es

$$\int_a^b A(x)\,dx,$$

donde $A(x)$ es el área de la sección transversal cortada por un plano. Observa que a la misma altura, una sección transversal del lado izquierdo es un círculo de radio r

y una sección transversal del lado derecho también es un círculo de radio r. Como $A(x)$ es igual en ambos casos, los volúmenes deben ser iguales.

5. Con el planteamiento de la figura 5.1.12, rebanamos W en forma vertical mediante planos para producir triángulos R_x de área $A(x)$ de la figura. La base b del triángulo es $b = \sqrt{r^2 - x^2}$ y la altura es $h = b \tan\theta = \sqrt{r^2 - x^2}\tan\theta$. Entonces $A(x) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)\tan\theta$. Por tanto, el volumen es

$$\int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \frac{1}{2}(r^2 - x^2)\tan\theta\,dx = \frac{1}{2}(\tan\theta)\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r}$$

$$= \frac{1}{2}\tan\theta\left(2r^3 - \frac{2r^3}{3}\right) = \frac{2r^3}{3}\tan\theta.$$

8. Observa que cuando y está en el intervalo $[-1, 0]$, $|y| = -y$, por lo cual

$$\int_R \left(|y|\cos\frac{\pi x}{4}\right) dy\,dx = \int_0^2\int_{-1}^{0}\left(-y\cos\frac{\pi x}{4}\right) dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left[\left(\frac{-y^2}{2}\cos\frac{\pi x}{4}\right)\Bigg|_{y=-1}^{0}\right] dx$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{4}\right) dx = \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{4}\Bigg|_0^2 = \frac{2}{\pi}.$$

10. Como $f(x, y) \geq 0$ para todos los puntos en R, $\int_R f(x, y)\,dy\,dx$ es el volumen que buscamos, es decir

$$\int_1^2\int_0^1 (1 + 2x + 3y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[\left(y + 2xy + \frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{1}\right] dx$$

$$= \int_1^2 \left(2x + \frac{5}{2}\right) dx = \left(x^2 + \frac{5x}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{11}{2}.$$

5.2 Integral doble sobre un rectángulo

OBJETIVOS

1. Poder calcular una integral doble sobre una región triangular.

2. Entender el teorema de Fubini.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Definición.* La definición de integral es más importante para el trabajo teórico que para los cálculos. La integral está definida mediante la suma de Riemann:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk})\Delta x\, \Delta y.$$

   Aun cuando no sea necesario, conviene usar particiones con separaciones regulares, es decir, particiones con espacios iguales.

2. *Propiedades.* Muchas de las propiedades que tienen las integrales sencillas también las tienen las integrales dobles. Por ejemplo, la integrabilidad de cualquier función continua o continua a trozos.

3. *Advertencia.* Al igual que ocurre con las funciones de una variable,

$$\left[\iint_R f\, dA\right]\left[\iint_R g\, dA\right] \neq \left[\iint_R fg\, dA\right],$$

   en general. En otras palabras, el producto de dos integrales no tiene por qué ser igual a la integral del producto.

4. *Nueva terminología.* Los nombres de las propiedades son ahora linealidad, homogeneidad, monotonía y aditividad. Debes conocer los enunciados aun cuando no conozcas los nombres.

5. *Teorema de Fubini.* Dice que, para una función continua a trozos, puedes integrar variable por variable y el orden de integración no importa.

6. *Integrales dobles y volumen.* Recuerda, si $f(x, y) \geq 0$, la integral doble es el volumen de la región que está entre la gráfica de $f(x, y)$ y el plano xy. Si $f(x, y) < 0$, entonces la integral es el volumen de la región entre el plano xy y la gráfica de $f(x, y)$ con signo negativo.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (b) Calculamos la integral doble mediante integrales iteradas:

$$\int_R ye^{xy} dA = \int_0^1 \int_0^1 ye^{xy} dx\, dy = \int_0^1 \left[e^{xy} \Big|_0^1 \right] dy$$

$$= \int_0^1 (e^y - 1)\, d = (e^y - y)\Big|_0^1 = e - 2.$$

Observa que elegimos integrar primero en x porque hacerlo primero con respecto a y requeriría la integración por partes.

2. (b) La integral iterada es:

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 (ax+by+c)dx\right] dy = \int_0^1 \left[\left(\frac{ax^2}{2} + (by+c)x\right)\Big|_{y=1}^{2}\right] dy$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{a}{2} + by + c\right) dy = \left[\frac{by^2}{2} + \left(\frac{a}{2}+c\right)y\right]\Big|_0^1$$
$$= \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + c.$$

5. Usaremos el hecho de que $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$ para cualquier constante c. Si primero integramos con respecto a x, entonces $g(y)$ se mantiene constante en el primer paso, y por lo tanto

$$\int_R [f(x)g(y)]\,dx\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x)g(y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x)g(y)\,dx\right] dy$$
$$= \int_c^d \left[g(y)\int_a^b f(x)\,dx\right] dy,$$

donde $\int_a^b f(x)\,dx$ es constante respecto a y. Si factorizamos la constante de la integral, obtenemos

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]\left[\int_c^d g(y)\,dy\right].$$

7. La función $x^2 + y$ es positiva en R, por lo tanto, la integral doble representa el volumen buscado.

$$\int_0^1\int_1^2 (x^2+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\left(yx^2 + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=1}^{2}\right] dx = \int_0^1 \left(x^2+\frac{3}{2}\right) dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{11}{6}.$$

Entonces, el volumen es $11/6$.

11. En la primera versión del teorema de Fubini (teorema 3), es necesario que la función sea continua, sin embargo, el teorema $3'$ generaliza este resultado. La segunda

versión establece que puede existir discontinuidades si f es acotada y está compuesta por la unión de un número finito de funciones continuas. El problema en este ejercicio es que la función f no es acotada y no es unión finita de funciones continuas. Aun cuando f es continua sobre cada subregión, hay un número infinito de subregiones. Además, cuando nos aproximamos al origen, f tiende a $\pm\infty$ con un comportamiento no muy bueno.

5.3 Integral doble sobre regiones más generales

OBJETIVOS

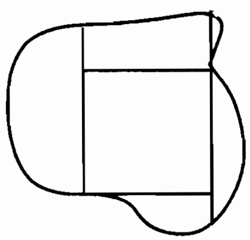
1. Poder calcular una integral doble sobre una región elemental en el plano xy.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Tipos de Regiones.* Una región del tipo 1 está acotada por las rectas $x = a$, $x = b$ y dos curvas que son funciones de x para $a \leq x \leq b$. Una región del tipo 2 está acotada por las rectas $y = c$, $y = d$ y dos curvas que son funciones de y para $c \leq y \leq d$. Las regiones del tipo 3 son regiones que se pueden clasificar como regiones del tipo 1 y del tipo 2. Observa la figura 5.3.3.

2. *Reconocimiento de tipos de regiones.* Para propósitos de integración es más importante reconocer un tipo de región que poder nombrarla. Tu principal preocupación debe ser aprender cómo calcular integrales dobles.

3. *Simplificación de regiones complicadas.* La mayor parte de las regiones se puede dividir en regiones del tipo 1 y del tipo 2. Por ejemplo, la región de la izquierda se puede dividir en seis partes, cada una de las cuales es del tipo 1 o del tipo 2. De hecho, muchas de las subregiones son de los tipos 1 y 2.



4. *Cómo integrar.* Lo mejor es usar la integral iterada

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

para regiones del tipo 1. Para regiones del tipo 2 es mejor usar la integral iterada

$$\int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

5. *Cómo elegir límites de integración.* Cuando efectúes una integración múltiple debes asegurarte de que los límites de integración no incluyan ninguna de las variables ya integradas. En particular, no debe haber variables en los límites de la última integral. Por ejemplo, la integral de $(x + y)^2$ sobre la región $D: 0 \leq y \leq x^2$, $0 \leq x \leq 1$, debería escribirse como:

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} (x+y)^2 dy\, dx \quad \text{y no} \quad \int_0^{x^2} \int_0^1 (x+y)^2 dx\, dy.$$

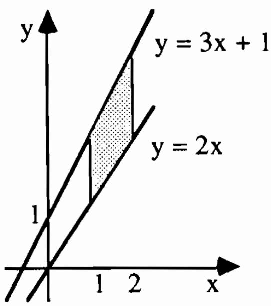
Esbozar la región ayuda a menudo a elegir límites. También es útil hacer una interpretación de la figura de la siguiente manera, en este ejemplo: "cuando y varía de 0 a x^2, x varía de 0 a 1" o "para cada x entre 0 y 1, y varía de 0 a x^2". Haz un dibujo y razónalo.

6. *Definición de integral.* De la misma manera que en la sección anterior, ésta sólo es importante para propósitos teóricos. Hasta esta sección sólo sabemos integrar sobre rectángulos, por lo tanto, cubrimos la región con un rectángulo grande y definimos $f(x, y) = 0$ fuera de D.

7. *Integrales dobles y áreas.* Si $f(x, y) = 1$ sobre una región D, entonces $\int\int_D f(x, y)\, dA$ es el área de D.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (b)



La integral iterada es:

$$\int_1^3 \left[\int_{2x}^{3x+1} dy\right] dx = \int_1^2 \left(y\Big|_{y=2x}^{3x+1}\right) dx$$

$$= \int_1^2 (3x + 1 - 2x)\, dx$$

$$= \int_1^2 (x+1)\, dx$$

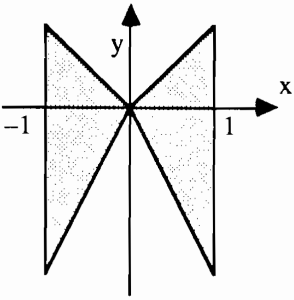
$$= \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)\Big|_1^2 = \frac{5}{2}.$$

Para cada x_0 en $[1, 2]$, la región se extiende de $2x_0$ a $3x_0 + 1$, de donde obtenemos la región que se muestra en el dibujo. Ésta es una región de tipo 1 porque se puede describir como

$$1 \leq x \leq 2 \qquad \text{y} \qquad 2x \leq y \leq 3x + 1.$$

También es una región del tipo 2 porque se puede describir como $2 \leq y \leq 7$ y $1 \leq x \leq y/2$ para x en $[2, 4]$, $(y-1)/3 \leq x \leq 2$ para x en $[4, 7]$.

2. (b) Primero dibujamos la región. Para cada x_0 en $[-1, 1]$, la región se extiende de $-2|x_0|$ a $|x_0|$, de esta manera obtenemos la región del dibujo. La integral es más sencilla si se divide la región en dos partes, de donde,



$$\int_{-1}^{1}\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\,dy\,dx = \int_{-1}^{0}\int_{2x}^{-x} e^{x+y}\,dy\,dx + \int_{0}^{1}\int_{-2x}^{x} e^{x+y}\,dy\,dx.$$

Observa que cuando x está en $[-1, 0]$, $|x| = -x$. La primera integral de la suma es

$$\int_{-1}^{0}\left(e^{x+y}\Big|_{y=2x}^{-x}\right)dx = \int_{-1}^{0}(1-e^{3x})\,dx = \left(x-\frac{e^{3x}}{3}\right)\Big|_{-1}^{0} = \frac{2}{3}-\frac{1}{3e^3}.$$

La segunda integral de la suma es

$$\int_{0}^{1}\left(e^{x+y}\Big|_{y=-2x}^{x}\right)dx = \int_{0}^{1}(e^{2x}-e^{-x})\,dx = \left(\frac{e^{2x}}{3}-e^{-x}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{e^2}{2}+\frac{1}{e}-\frac{3}{2}.$$

Por lo tanto, la integral completa es $e^2/2 + 1/e - 1/3e^3 - 5/6$. La región es del tipo 1 porque se puede describir como

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad -2|x| \leq y \leq |x|.$$

No se puede describir como una región del tipo 2 si no se divide.

(e) La integral iterada es

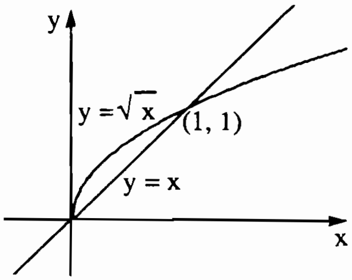
$$\int_{0}^{1}\left[\int_{y^2}^{y}(x^n+y^m)\,dx\right]dy = \int_{0}^{1}\left[\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+xy^m\right)\Big|_{x=y^2}^{y}\right]dy$$

$$= \int_{0}^{1}\left(\frac{y^{n+1}}{n+1}+y^{m+1}-\frac{y^{2n+2}}{n+1}-y^{m+2}\right)dy$$

$$= \left(\frac{y^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{y^{m+2}}{m+2}-\frac{y^{2n+3}}{(n+1)(2n+3)}-\frac{y^{m+3}}{m+3}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{m+2}-\frac{1}{(n+1)(2n+3)}-\frac{1}{m+3}.$$

Para dibujar la región, para todo y_0 en [0, 1], x varía de $x = y_0^2$ hasta $x = y_0$.



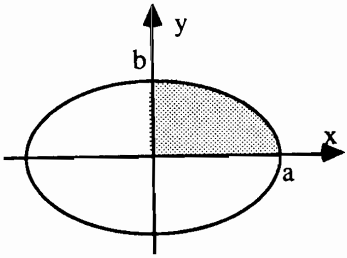
Ésta es una región del tipo 2 porque se puede describir como

$$0 \leq y \leq 1 \quad \text{y} \quad y^2 \leq x \leq y.$$

También es una región del tipo 1 porque se puede describir como

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad x \leq y \leq \sqrt{x}.$$

4.



La ecuación de un elipse con semiejes a y b es $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$ o $x^2/b^2+y^2/a^2 = 1$. En cualquiera de los dos casos, el área es la misma. Usaremos la primera ecuación, encontraremos el área de la parte de la elipse que está en el primer cuadrante y luego lo multiplicaremos por 4. El área de esta región se describe mediante

$$0 \leq x \leq a \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq b\sqrt{1 - x^2/a^2}.$$

Podemos calcular un área mediante la integral doble $\int_R dA$. En este caso tenemos

$$\frac{1}{4}A = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dy\,dx = \int_0^a \left(y\Big|_{y=0}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \right) dx = b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx.$$

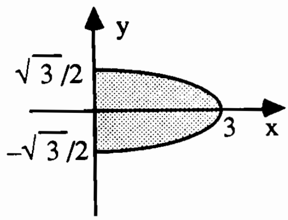
Si hacemos $u = x/a$, la integral anterior es igual a

$$b \int_0^1 a\sqrt{1 - u^2}du = ab \int_0^1 \sqrt{1 - u^2}du.$$

La integral $\int_0^1 \sqrt{1 - u^2}\, du$ es el área de un cuarto de círculo de radio 1, el cual es $\pi/4$, entonces $A/4 = ab\pi/4$. Por lo tanto, el área de la elipse es $A = ab\pi$.

7. La región D, que se grafica en la página siguiente, se puede describir mediante

$$-\sqrt{3}/2 \leq y \leq -\sqrt{3}/2 \quad \text{y} \quad 0 \leq x \leq -4y^2 + 3,$$

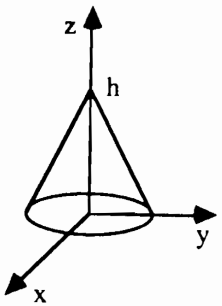


por consiguiente,

$$\int_D x^3 y\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\int_0^{-4y^2+3} x^3 y\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\left(\frac{x^4}{4}y\Big|_{x=0}^{-4y^2+3}\right)dy = \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{(4y^2+3)^4 y}{4}dy.$$

Sea $u = -4y^2 + 3$, obtenemos una integral cuyos límites de integración son 0 y 0, así que la integral es 0.

12. 

Este problema muestra las deficiencias de la integración en coordenadas cartesianas. La ecuación del cono es:

$$z = h - \frac{h}{r}(x^2+y^2)^{1/2}.$$

La región de integración es la base del cono, la cual se describe de la forma

$$-r \le x \le r \text{ y } -\sqrt{r^2-x^2} \le y \le -\sqrt{r^2-x^2}.$$

Por lo tanto, el volumen del cono es

$$\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\left(h - \frac{h}{r}(x^2+y^2)^{1/2}\right)dy\,dx.$$

Ésta es la respuesta correcta. (Nota: en esta etapa la integración no se puede realizar fácilmente. Sin embargo, si vemos la sección 6.3 del libro, podemos usar coordenadas cilíndricas (véase pág. 381) y la integral se transforma en

$$\int_0^{2\pi}\int_0^r\left(h - \frac{h}{r}\rho\right)d\rho\,d\theta = \frac{\pi r^2}{3}h,$$

la cual es una fórmula de geometría elemental.)

14. Sea D una region del tipo 1, entonces D se puede describir de la forma

$$a \le x \le b \quad \text{y} \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$$

y la integral $\int_D f(x)g(x)\,dA$ se transforma en

$$\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x)g(y)\,dy\,dx.$$

Ahora integramos con respecto a y. Sea G una antiderivada de g y observa que f es una constante en y. Obtenemos

$$\int_a^b\left[f(x)\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(x)\,dy\right]dx \int_a^b f(x)\big[G(\varphi_2(x)) - G(\varphi_1(x))\big]dx.$$

G depende de x, por consiguiente, no se puede considerar constante y no se puede sacar del signo de integral. Por lo tanto, en general, $\int_D f(x)g(y)\,dy\,dx$ no es el producto de dos integrales.

5.4 Cambio de orden en la integración

OBJETIVOS

1. Poder evaluar una integral doble mediante un cambio en el orden de integración.

2. Poder enunciar y entender el teorema del valor medio para integrales dobles.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Justificación para el cambio de orden.* Recuerda que el teorema de Fubini te permite el cambio de orden en la integración. Algunas veces un cambio en el orden de integración simplifica un problema. Trata de hacer el ejemplo 1 sin cambiar el orden de integración y compara la eficiencia de ambos métodos. (Tal vez necesites usar sustituciones trigonométricas.) Algunas veces una integral doble se puede calcular sólo si se cambia el orden de integración.

2. *Cómo empezar.* Es útil esbozar la región de integración antes de elegir los nuevos límites.

3. *Teorema del valor medio para integrales.* Si se satisface las dos condiciones: (i) f es continua y (ii) D es una región elemental, entonces la conclusión es

$$\iint_D f(x, y)\, dA = f(x_0, y_0) \cdot \text{área}\,(D)$$

para algún punto (x_0, y_0) en D.

4. *Elementos del teorema del valor medio.* Si m es el valor mínimo de $f(x, y)$ en D y M es el valor máximo, entonces

$$m \cdot \text{área}\,(D) \leq \iint_D f(x, y)\, dA \leq M \cdot \text{área}\,(D).$$

Esto nos permite estimar el valor de la integral doble.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

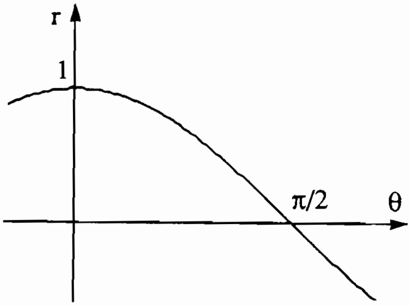
1. (b) Primero, recordaremos que $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ y calcularemos la integral tal como está planteada:

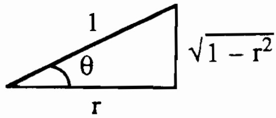
$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} \cos\theta\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\left(r\cos\theta\Big|_{r=0}^{\cos\theta}\right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

De la gráfica vemos que si elegimos r_0, entonces θ varía de 0 a $\cos^{-1}(r_0)$. Entonces, la región se puede describir como

$$0 \leq r \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq \cos^{-1}(r).$$





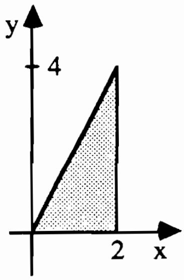
Por lo tanto, si cambiamos el orden de integración, obtenemos

$$\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1}(r)} \cos\theta \, d\theta \, dr = \int_0^1 \left(\operatorname{sen}\theta \Big|_{\theta=0}^{\cos^{-1}(r)} \right) dr = \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\cos^{-1}(r)\right) dr.$$

Del triángulo, vemos que $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}(r)\right) = \sqrt{1-r^2}$. Identificamos la integral como el área de un cuarto de círculo de radio 1, por consiguiente

$$\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, dr = \frac{\pi}{4}.$$

2. (c)



La región de integración se grafica aquí. No existe una función que pueda expresarse en términos de funciones elementales, cuya derivada sea $\exp(x^2)$, en consecuencia, tratamos de cambiar el orden de integración. La región puede expresarse como una región de tipo 1:

$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq 2x.$$

Por lo tanto, la integral se transforma en

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \exp(x^2)\, dy\, dx = \int_0^2 \left[y \exp(x^2) \Big|_{y=0}^{2x} \right] dx$$

Hacemos $u = x^2$ y obtenemos

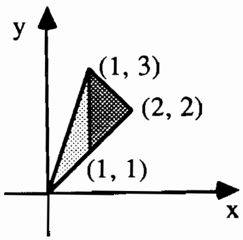
$$\int_0^2 2x \exp(x^2)\, dx = \int_0^4 e^u du = e^u \Big|_0^4 = e^4 - 1.$$

3. Esta fórmula es una aplicación de la ecuación (6). La región D es $[-\pi, \pi]\times[-\pi, \pi]$, por lo que $A(D)$ es el área de D, que es $4\pi^2$. La función $f(x, y) = e^{\operatorname{sen}(x+y)}$ toma su valor máximo cuando $\operatorname{sen}(x + y)$ toma su valor máximo, es decir, cuando $x + y = \pi/2 \pm 2n\pi$, donde n es un entero. De manera similar, $f(x, y)$ toma su valor mínimo cuando $x + y = -\pi/2 \pm 2n\pi$. Sobre la región D tenemos $-1 \leq \operatorname{sen}(x + y) \leq 1$, de donde $m = 1/e$ y $M = e^1$. Por lo tanto, si sustituimos todo en la fórmula (6) de la página 340 del texto tenemos

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_D f(x, y)\,dA \leq e.$$

6. El área del triángulo es $1/2$. La función $f(x, y) = 1/(y - x + 3)$ es mínima cuando $y - x + 3$ toma su valor máximo en D. Observa que $y \leq x$ en D, de donde, $y - x + 3$ toma su valor máximo cuando $y = x$, y por tanto, $m = 1/3$. De manera similar, vemos que M está en $(1, 0)$ cuando $f(1, 0) = 1/2$. Ahora, la fórmula (6) nos da

$$\frac{1}{3} \leq 2\int_D f(x, y)\,dA \leq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{6} \leq \int_D f(x, y)\,dA \leq \frac{1}{4}.$$

10. 

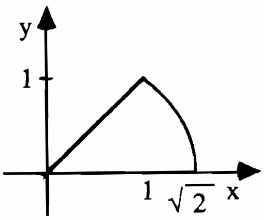
Necesitamos dividir el triángulo en dos partes: una para $x \in [0, 1]$, y la otra para $x \in [1, 2]$. Cuando $x \in [0, 1]$, tenemos $x \leq y \leq 3x$, de donde la integral en esta región es

$$\int_0^1\int_x^{3x} e^{x-y}\,dy\,dx = \int_0^1 \left(-e^{x-y}\Big|_{y=x}^{3x}\right) dx$$
$$= \int_0^1 (-e^{-2x} + 1)dx$$
$$= \left(\frac{e^{-2x}}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2}.$$

Para la segunda región tenemos $x \leq y \leq 4 - x$, por tanto, la integral sobre dicha región es

$$\int_1^2\int_x^{4-x} e^{x-y}\,dy\,dx = \int_1^2 \left(-e^{x-y}\Big|_{y=x}^{4-x}\right) dx = \int_1^2 (-e^{2x-4} + 1)\,dx$$
$$= \left(\frac{-e^{2x-4}}{2} + x\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2}.$$

Si sumamos las dos integrales, obtenemos $1 + 1/e^2$.

13. 

Primero graficamos la región. Para toda y_0 en $[0, 1]$, x va de y_0 hasta $\sqrt{2 - y_0^2}$. Para describir el conjunto como una región del tipo 2, debemos subdividir la región en $x = 1$. Cuando x está en $[0, 1]$, tenemos $0 \leq y \leq x$. Cuando x está en $[1, \sqrt{2}]$, tenemos $0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}$. Entonces tenemos

$$\int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y)\, dx\right] dy = \int_0^1 \left[\int_0^x f(x, y)\, dy\right] dx + \int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)\, dy\right] dx.$$

En algunos casos, el lado izquierdo será el más fácil de trabajar.

15. Esta demostración requiere usar la regla de la cadena. Sea

$$G(x, u) = \int_a^x \int_c^d f(u, y, z)\, dz\, dy.$$

Queremos encontrar dG/dx, (la "diferencial total", si se prefiere) cuando $u = x$. Por la regla de la cadena,

$$\frac{dG}{dx} = \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{u=x} + \left.\frac{\partial G}{\partial u}\right|_{u=x}$$

$\partial G/\partial x$ es sencilla: es igual a

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^x \left[\int_c^d f(u, y, z)\, dz\right] dy.$$

Del teorema fundamental del cálculo (de una variable), sólo tomamos el "integrando" (la integral respecto a dz en este caso) y sustituimos y por x (porque estamos integrando con respecto a y). En $u = x$,

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{u=x} = \int_c^d f(u, x, z)\, dz.$$

$\partial G/\partial u$ es un poco más difícil. Primero,

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \int_a^x \int_c^d f(u, y, z)\, dz\, dy = \int_a^x \int_c^d \frac{\partial}{\partial u} f(u, y, z)\, dz\, dy.$$

Si asumimos que f es una bonita función tal que el orden de integración y diferenciación puede intercambiarse. Ahora queremos evaluar todo en $u = x$, por lo que simplemente reemplazamos u por x, y obtenemos

$$\left.\frac{\partial G}{\partial u}\right|_{u=x} = \int_a^x \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(u, y, z)\, dz\, dy.$$

Combinamos los dos resultados y obtenemos el resultado que se pide.

5.5 Algunos teoremas técnicos de integración

OBJETIVOS

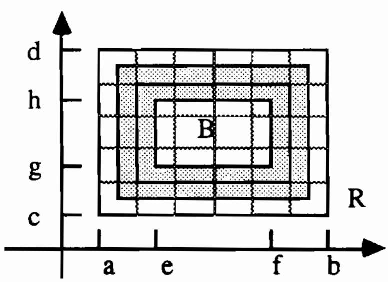
1. Entender la demostración de los teoremas que se estudiaron en el capítulo 5.
2. Poder usar sumas de Riemann y sucesiones de Cauchy para hacer demostraciones.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Cómo estudiar esta región.* Esta sección tiene el mismo nivel de dificultad que la sección 2.7, y se debe estudiar de la misma manera. Pregunta a tu profesor si es necesario aprenderla.
2. *Conceptos principales usados en las demostraciones.* Muchas de las demostraciones de esta sección usan los conceptos de suma de Riemann, la desigualdad del triángulo y continuidad en términos de ε-δ, particularmente con la noción de continuidad uniforme.
3. *Continuidad.* En la sección 2.2 estudiamos una definición de continuidad. Dicho concepto se conoce como continuidad punto por punto. En esta sección estudiaremos continuidad uniforme, un tipo de continuidad más fuerte. La continuidad uniforme difiere de la de punto por punto en que δ se elige independiente de cualquier punto $\mathbf{x}$ del dominio.
4. *Sucesión de Cauchy.* En una sucesión de Cauchy la distancia entre los elementos s_n y s_m es menor que ε si n y m son suficientemente grandes. Un hecho básico es que toda sucesión de Cauchy converge a un límite. Si la sucesión está contenida en un conjunto cerrado, el límite también pertenece al conjunto.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. Supongamos que $a \neq b$ y $a > b$, entonces $a - b < \varepsilon$ para toda ε. Elegimos $\varepsilon = (a-b)/2$, entonces $b + \varepsilon = (a-b)/2 + b = (a+b)/2 < (a+a)/2 = a$, o $a - b > \varepsilon$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $a = b$.

5. 

Sea $R = [a,b] \times [c,d]$ y $B = [e,f] \times [g,h]$. Tomamos una partición de R en $n \times n$ piezas rectangulares r_n de tamaño $\big((b-a)/n\big) \times \big((d-c)/n\big)$, como se muestra en la figura. Es evidente que $B \le b_n$, porque b_n es el área de sólo aquellas r_n cuya intersección con B es diferente del vacío. Llamemos A a esta unión. Por otro lado, supongamos que (x, y) es un punto en A. Entonces (x, y) debe estar al menos en un rectángulo de B,

es decir, si (x, y) no está en B, debe estar en alguna parte dentro de un "marco" alrededor de B (el área sombreada). Lo cual nos da $b_n \leq$ área de B + área del marco = área de $B + 2(h-g)(b-a)/n + 2(f-e)(d-c)/n + 4\big((b-a)/n\big)\big((d-c)/n\big)$ o $b_n \leq$ área de $B + (2/n)[(h-g)(b-a) + (f-e)(d-c)] + (4/n^2)[(b-a)(d-c)]$. Cuando $n \to \infty$, $1/n$ y $1/n^2$ se aproximan a 0, por lo tanto $b_n \leq$ área de B. De esto y el resultado anterior, llegamos a la conclusión de que b_n = área de B cuando $n \to \infty$.

5.R Ejercicios de repaso del capítulo 5

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (b) Evaluamos ésta como integral iterada:

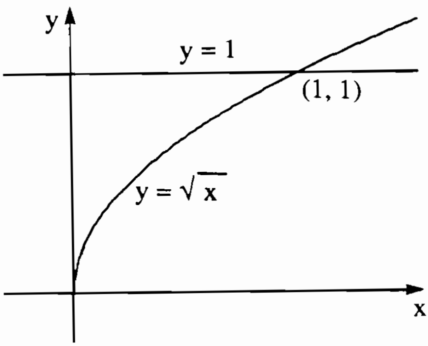
$$\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x}}^1 (x+y)^2 dy\right] dx = \int_0^1 \left[\frac{(x+y)^3}{3}\bigg|_{y=\sqrt{x}}^1\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{(x+1)^3}{3} - \frac{(x+\sqrt{x})^3}{3}\right] dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(-3x^{5/2} - x^{3/2} + 3x + 1\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{-6x^{7/2}}{7} - \frac{2x^{5/2}}{5} + \frac{3x^2}{2} + 1\right)\bigg|_0^1 = \frac{29}{70}$$

2. (b)



La región aparece en la figura de la izquierda. Se puede describir como una región del tipo 2 mediante las ecuaciones

$$0 \leq y \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq x \leq y^2,$$

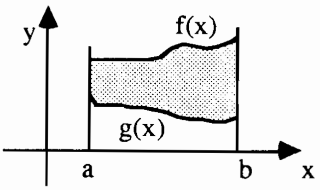
de donde obtenemos

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} (x+y)^2 dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{(x+y)^3}{3}\bigg|_{x=0}^{y^2}\right] dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left[(y^2+y)^3 - y^3\right] dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (y^6 + 3y^5 + 3y^4)\,dy = \frac{1}{3}\left(\frac{y^7}{7} + \frac{y^6}{2} + \frac{3y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{29}{70}.$$

5. 

Esperamos obtener del cálculo de una variable:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \text{ si } f \geq g \text{ para } x \in [a, b].$$

La región D se puede describir como $a \leq x \leq b$ y $g(x) \leq y \leq f(x)$ porque es una región del tipo 1. Por consiguiente el área de D es

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} dy\,dx = \int_a^b \left[y\Big|_{y=g(x)}^{f(x)} \right] dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

7. (b) Como región del tipo 1, el círculo se puede describir mediante

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}.$$

Entonces, tenemos

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2y^2\,dy\,dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2y^3}{3}\Bigg|_{y=-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}} \right] dx$$
$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^1 x^2(1-x^2)^{3/2}\,dx.$$

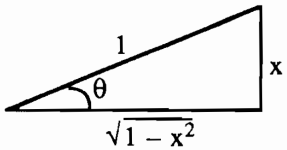
Usamos la sustitución trigonométrica: $\sqrt{1-x^2} = \cos\theta$, $x = \operatorname{sen}\theta$ y $dx = \cos\theta\, d\theta$, de donde

$$\int x^2(1-x^2)^{3/2}dx = \int \operatorname{sen}^2\theta \cos^3\theta(\cos\theta\, d\theta) = \int (\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}^4\theta + \operatorname{sen}^6\theta)\,d\theta,$$

la cual se obtiene usando la identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ y desarrollando el binomio. Ahora usamos las identidades: $\operatorname{sen}^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ y $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$. Obtenemos:

$$\int \left[\frac{1 - \cos 2\theta}{2} - \frac{1 - 2\cos 2\theta}{2} - \frac{\cos^2 2\theta}{2} + \frac{1 - 3\cos 2\theta + 3\cos^2 2\theta - \cos^3 2\theta}{8} \right] d\theta$$

$$= \int \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\cos 4\theta + \frac{\cos 2\theta \operatorname{sen}^2 2\theta}{8} \right) d\theta = \frac{\theta}{16} + \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{64} - \frac{\operatorname{sen}^3 2\theta}{48} + C.$$

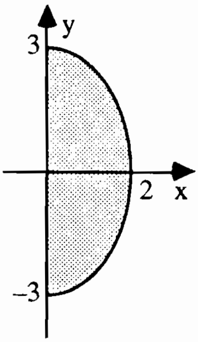


Ahora usamos las identidades sobre el doble de un ángulo y las siguientes que obtenemos del triángulo de la figura: $\theta = \operatorname{sen}^{-1} x$, $\operatorname{sen}\theta = x$ y $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$. Si sustituimos y evaluamos en ± 1, obtenemos

$$\left[\frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{16} - \frac{4x\sqrt{1-x^2}(1-x^2-x^2)}{64} - \frac{8x^3(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{48}\right]\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{16}.$$

Por lo tanto, la integral original se transforma en $(2/3)(\pi/16) = \pi/24$.

12.



Tal como la integral está planteada, la región que describen las ecuaciones $0 \le x \le 2$ y $-3\sqrt{4-x^2}/2 \le y \le 3\sqrt{4-x^2}/2$ es del tipo 1. Cuando se simplifica $y = 3\sqrt{4-x^2}/2$, obtenemos $y^2/9 + x^2/4 = 1$, la cual identificamos como una elipse, tal como muestra nuestra figura. Evaluamos de la manera siguiente:

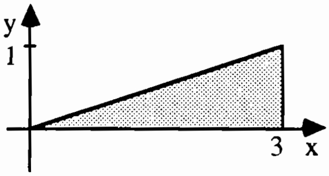
$$\int_0^2 \int_{-3\sqrt{4-x^2}/2}^{3\sqrt{4-x^2}/2} \left(\frac{5}{\sqrt{2+x}} + y^3\right) dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left[\left(\frac{5y}{\sqrt{2+x}} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{y=-(3/2)(4-x^2)^{1/2}}^{(3/2)(4-x^2)^{1/2}}\right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[15\sqrt{2-x} + \frac{81}{64}(16 - 8x^2 + x^4)\right] dx$$

$$= \left[-10(2-x)^{3/2} + \frac{81}{64}\left(16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\right]\Bigg|_0^2 = 20\sqrt{2} + \frac{324}{15}.$$

16.



Tal como está planteada, la región que describen las ecuaciones $0 \le y \le 1$ y $0 \le x \le 3y$ es del tipo 2. La región se muestra a la izquierda. Evaluamos la integral doble de la manera siguiente:

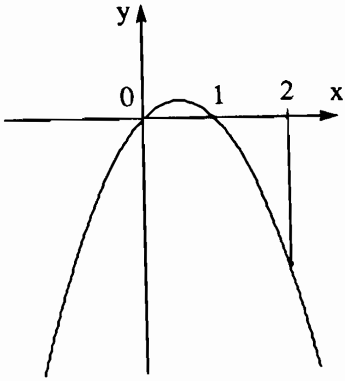
$$\int_0^1 \int_0^{3y} e^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(e^{x+y}\Big|_{x=0}^{3y}\right) dy$$

$$= \int_0^1 (e^{4y} - e^y)\,dy = \left(\frac{e^{4y}}{4} - e^y\right)\Bigg|_0^1 = \frac{e^4}{4} - e + \frac{3}{4}.$$

19. La región se grafica aquí. Observa que consta de las regiones siguientes:

$$0 \le x \le 1 \quad \text{y} \qquad 0 \le y \le -x^2 + x$$
$$1 \le x \le 2 \quad \text{y} \quad -x^2 + x \le y \le 0.$$

Evaluamos como suma de integrales:



$$\int_0^1 \int_0^{-x^2+x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{-x^2+x}^0 f(x,y)\,dy\,dx.$$

La primera integral es:

$$\int_0^1 \int_0^{-x^2+x} (x^2 + 2xy + 2)\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \left[\left(x^2 y + \frac{2xy^3}{3} + 2y \right) \Big|_{y=0}^{-x^2+x} \right] dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{-2x^7}{3} + 2x^6 - 2x^5 - \frac{x^4}{3} + x^3 - 2x^2 + 2x \right) dx$$
$$= \left(\frac{-x^8}{12} + \frac{2x^7}{7} - \frac{x^6}{3} - \frac{x^5}{15} + \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{27}{70}.$$

La segunda integral es:

$$\int_1^2 \int_{-x^2+x}^0 (x^2 + 2xy^2 + 2)dy\,dx = \int_1^2 \left[\left(x^2 y + \frac{2xy^3}{3} + 2y \right) \Big|_{y=-x^2+x}^{y=0} \right] dx$$
$$= (-1)\int_1^2 \left(\frac{-2x^7}{3} + 2x^6 - 2x^5 - \frac{x^4}{3} + x^3 - 2x^2 + 2x \right) dx$$
$$= (-1)\left(\frac{-x^8}{12} + \frac{2x^7}{7} - \frac{x^6}{3} - \frac{x^5}{15} + \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_1^2$$
$$= (-1)\left(\frac{-584}{105} - \frac{27}{70} \right).$$

Sumamos las dos integrales y obtenemos $19/3$.

23. La función $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ tiene valor $r^2 + 1$ donde r es la distancia al origen. Por consiguiente, en D, $1 \le f(x,y) \le 5$. El área de D es 4π, en consecuencia, por el teorema del valor medio, tenemos el resultado que se quería.

CAPÍTULO 6
INTEGRAL TRIPLE, FÓRMULA DE CAMBIO DE VARIABLE Y APLICACIONES

6.1 Integral triple

OBJETIVOS

1. Poder calcular una integral triple sobre regiones generales en el espacio.

2. Saber cambiar el orden de integración para calcular integrales triples.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Notación.* Usaremos dV en lugar del término diferencial $dx\,dy\,dz$, ya que éste representa un volumen.

2. *Propiedades.* Muchas de las propiedades de la integral triple son las mismas que las de la integral doble. La integral triple se puede considerar como una integral iterada y se integra de adentro hacia afuera. El teorema de Fubini aún vale y todavía podemos integrar todas las funciones continuas a trozos.

3. *Tipos de región.* Hay dos variedades del tipo I de regiones, así como dos del tipo II y del tipo III. En muchos casos, cuatro de las seis superficies son "planas". Los tipos de región dependen de la clase de las superficies que "no son planas". Las superficies del tipo I que "no son planas" son funciones de x y de y. Las superficies del tipo II que "no son planas" son funciones de y y de z; las superficies del tipo III que "no son planas" son funciones de x y de z.

4. *Bolas.* El ejemplo 1 muestra que la bola unitaria es una región del tipo I. Planteada en la forma

$$-1 \le z \le 1, -\sqrt{1-z^2} \le y \le \sqrt{1-z^2} \text{ y } -\sqrt{1-z^2-y^2} \le x \le \sqrt{1-z^2-y^2},$$

la bola es una región del tipo II. De manera similar, la bola de tipo III se describe mediante

$$-1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \text{ y } -\sqrt{1-x^2-z^2} \leq x \leq \sqrt{1-x^2-z^2}.$$

La resolución del ejemplo 1 utiliza una descripción del tipo 1 para D. Si usáramos una descripción del tipo 2 generaríamos tres descripciones más de W.

5. *Cómo integrar.* De la misma manera que con las integrales dobles, saber cómo plantear los límites mediante la identificación del tipo de región es más importante que conocer el número del tipo. Hacer un dibujo de la región ayuda a encontrar los límites de integración, sin embargo, en muchas ocasiones es más fácil decirlo que hacerlo.

6. *Integrales triples y volúmenes.* Si $f(x, y, z) = 1$, entonces $\int_W f\, dV$ es el volumen de W.

7. *Truco de integración.* En el ejemplo 1 se muestra un artificio para ahorrar tiempo. Si nos damos cuenta de que una integral es el área de un círculo o de parte de éste, entonces no tenemos que efectuar el proceso de encontrar una antiderivada.

8. *Factorización de integrales.* Podemos simplificar el cálculo de una integral triple si usamos el hecho siguiente: si los límites de integración de la integral más interna no contienen ninguna variable y los límites de integración de dicha variable son constantes, entonces podemos podemos integrar por separado dicha variable y luego multiplicar por el resto de la integral. Por ejemplo,

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_2^3 f(x)g(y)h(z)\, dz\, dy\, dx \left(\int_2^3 h(z)\, dz \right) \left(\int_0^1 \int_x^{2x} f(x)g(y)\, dy\, dx \right)$$

porque la variable z no aparece en ninguno de los límites de integración y sus límites de integración son las constantes 1 y 0. No podemos integrar x por separado porque aparece en los límites de integración de y.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

2. Es más fácil integrar x antes de integrar y. Queremos evaluar

$$\int_W e^{-xy} y\, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{-xy} y\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\frac{e^{-xy}}{-y} \right) y \Big|_{x=1}^{1} \right] dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (1 - e^{-y})\, dy\, dz = \int_0^1 \left[(y + e^{-y}) \Big|_{y=0}^{1} \right] dz = \frac{1}{e} \int_0^1 dz = \frac{1}{e}.$$

Observa que deberías haber usado la integración por partes si querías integrar respecto a y antes de integrar respecto a x.

5. El plano $x + y = 1$ puede volverse a expresar como $x = 1 - y$, de donde

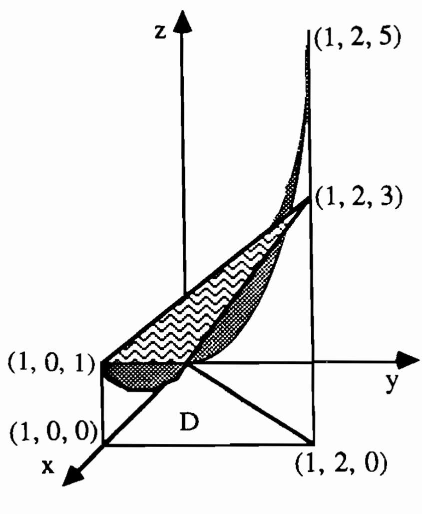
$$\int_W x^2 \cos z\, dV = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1-y} x^2 \cos z\, dx\, dy\, dz = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{x^3}{3}\cos z\Big|_{x=0}^{1-y}\right) dy\, dz$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}(1-y)^3 \cos z\, dy\, dz = \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left[\frac{-(1-y)^4}{4}\cos z\Big|_{y=0}^{\pi}\right] dz$$
$$= \frac{1-(1-\pi)^4}{12}\int_0^{\pi}\cos z\, dz = \frac{1-(1-\pi)^4}{12}(\operatorname{sen} z\Big|_0^{\pi} = 0.$$

De manera alternativa, ya que z no aparece en ninguno de los límites de integración y podemos "factorizar" fuera de la integral todas las partes que contienen a z.

$$\int_W x^2 \cos z\, dV = \left(\int_0^{\pi}\int_0^{1-y} x^2 dx\, dy\right)\left(\int_0^{\pi}\cos z\, dz\right) = 0 \quad \text{porque} \int_0^{\pi}\cos z\, dz = 0.$$

7. Evaluar las integrales iteradas:

$$\int_0^1\int_0^{2x}\int_{x^2+y^2}^{x+y} dz\, dy\, dx = \int_0^1\int_0^{2x}\left[z\Big|_{z=x^2+y^2}^{x+y}\right] dy\, dx = \int_0^1\int_0^{2x}(x+y-x^2-y^2)dy\, dx$$
$$= \int_0^1\left[\left((x-x^2)y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{2x}\right] dx$$
$$= \int_0^1\left(4x^2 - \frac{14x^3}{3}\right) dx = \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{7x^4}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$



Para bosquejar la región, supondremos que x toma valores en el intervalo $[0, 1]$. Por cada x_0 en el intervalo, la superficie D bosquejada se extiende de $y = 0$ a $y = 2x_0$. Entonces sobre cada punto (x_0, y_0) en D bosquejamos las superficies $z = x+y$ (el sombreado con rectas onduladas) y $z = x^2 + y^2$ (el sombreado oscuro), las cuales son un plano y un paraboloide. Observa que en una parte de D el paraboloide se encuentra por arriba del plano y en otra parte de D el paraboloide se encuentra por debajo del plano.

10. La superficie $z = x^2 + y^2$ es un paraboloide que se abre hacia arriba. La superficie $z = 10 - x^2 - 2y^2$ es un paraboloide que se abre hacia abajo. Cuando igualamos las dos superficies observamos que se intersecan donde $x^2 + y^2 = 10 - x^2 - 2y^2$ o bien $2x^2 + 3y^2 = 10$, que es una elipse. La elipse se puede describir como

$$-\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5} \qquad \text{y} \qquad -\frac{\sqrt{10-2x^2}}{3} \le y \le \frac{\sqrt{10-2x^2}}{3}.$$

El volumen que se pide, en forma de integral triple, es:

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \int_{-\sqrt{10-2x^2}/3}^{\sqrt{10-2x^2}/3} \int_{x^2+y^2}^{10-x^2-2y^2} dz\,dy\,dx = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \int_{-\sqrt{10-2x^2}/3}^{\sqrt{10-2x^2}/3} (10 - 2x^2 - 3y^2)dy\,dx$$

$$= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left[(10y - 2x^2y - y^3)\Big|_{y=-(10-2x^2)^{1/2}/3}^{(10-2x^2)^{1/2}/3} \right] dx$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left[10\sqrt{2}\sqrt{5-x^2} - 2\sqrt{2}x^2\sqrt{5-x^2} \right] dx.$$

De la tabla de integrales tenemos,

$$\int \sqrt{5-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{5-x^2} + \frac{5}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + C$$

y

$$\int x^2\sqrt{5-x^2}dx = \frac{x}{8}(2x^2-5)\sqrt{5-x^2} + \frac{25}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Por lo tanto, tenemos

$$V = \frac{4}{3\sqrt{3}} \left[10\sqrt{2}\left(\frac{x}{2}\sqrt{5-x^2} + \frac{5}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) \right) \right.$$

$$\left. - 2\sqrt{2}\left(\frac{x}{8}(2x^2-5)\sqrt{5-x^2} + \frac{25}{8}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) \right) \right] \Bigg|_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = \frac{25\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

13. La región W es aquella que está entre la superficie sombreada en el plano xy y la parte del cilindro de radio 2 que está sobre dicha superficie. (Véase la página siguiente.) De nuestro dibujo vemos que el área sombreada es del tipo 2 porque se puede describir como

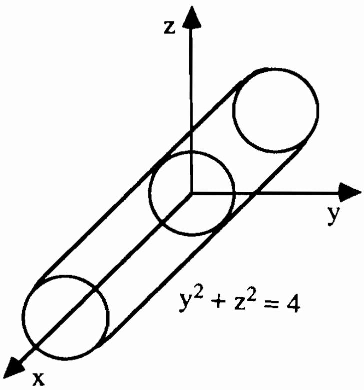
$$0 \le y \le 2 \quad \text{y} \quad 6 - 2y \le x \le 2 - y.$$

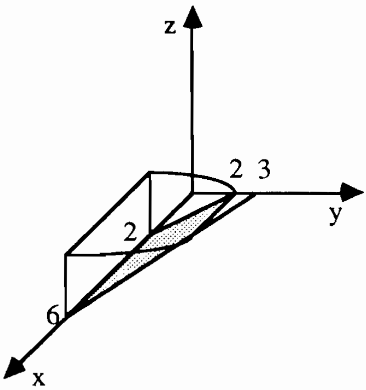
Por último, z varía del plano xy, $z = 0$, hasta el cilindro, $z = \sqrt{4 - y^2}$. Por lo tanto,

$$\int_W f(x, y, z)\, dV = \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} z\, dz\, dx\, dy = \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} \left(\frac{z^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{4-y^2}} \right) dx\, dy$$

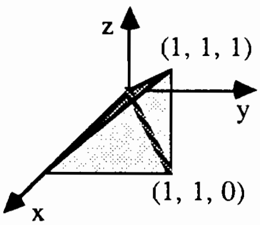
$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} (4 - y^2)\, dx\, dy = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[(4 - y^2)x \Big|_{x=2-y}^{6-2y} \right] dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 (16 - 4y^2 - 4y + y^3)\, dy = \frac{1}{2} \left(16y - \frac{4y^3}{3} - 2y^2 + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{26}{3}.$$





14.



Comenzando con el intervalo $0 \leq x \leq 1$, dibujamos la superficie D que se extiende desde $y = 0$ hasta $y = x_0$ para cada x_0 en $[0, 1]$. Luego, para cada (x_0, y_0) en D, la región W varía desde $z = 0$ hasta $z = y_0$. Estudiaremos cómo encontrar una integral equivalente con la forma

$$\int_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Primero notemos que z varía desde 0 a 1. Ahora, para cada z_0, y va de z_0 a 1. Esto nos da una superficie triangular en el plano yz. Por último, para cada (x_0, z_0) en la superficie triangular, x varía desde y_0 a 1. Por lo tanto, describimos W de la manera siguiente:

$$0 \leq z \leq 1, \quad \text{y} \quad z \leq y \leq 1, \quad \text{y} \quad y \leq x \leq 1.$$

Observemos que la superficie está acotada por los planos $z = 0$, $x = 1$, $y = z$ y $x = y$. Una segunda forma de describir la región es hacer que primero z varíe de 0

a 1. Luego, que x tome valores de z hasta 1. Y por último, que y se varíe desde los planos $y = z$ hasta $y = x$, de manera que W también se puede describir como

$$0 \leq z \leq 1, \quad \text{y} \quad z \leq x \leq 1, \quad \text{y} \quad z \leq y \leq x.$$

Las siguientes integrales son equivalentes:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx &= \int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \int_0^1 \int_0^y \int_y^1 f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy \\
&= \int_0^1 \int_0^x \int_z^x f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx \\
&= \int_0^1 \int_z^1 \int_z^x f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz.
\end{aligned}$$

Con una verificación rápida podemos ver que cada región tiene el mismo volumen si hacemos $f(x, y, z) = 1$. En este caso el volumen es $1/6$.

15. Supongamos que W es una región del tipo I, entonces

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{-\gamma(x,y)}^{\gamma(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_0^{\gamma(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx \\
&+ \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{-\gamma(x,y)}^{0} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.
\end{aligned}$$

Ahora, sea $z = -u$, entonces $dz = -du$, y la segunda mitad de la suma queda como

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{-\gamma(x,y)}^{0} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{-\gamma(x,y)}^{0} [-f(x, y, -u)]\, du\, dy\, dx \\
&= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_0^{-\gamma(x,y)} f(x, y, -u)\, du\, dy\, dx \\
&= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_0^{\gamma(x,y)} f(x, y, -z)\, dz\, dy\, dx.
\end{aligned}$$

Hemos usado el hecho de que $\gamma(x, y) = -\gamma(x, y)$ de la propiedad de simetría y una inversión de límites de integración. Por último, cambiamos la variable muda u por z. Por lo tanto, la integral original fue

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{-\gamma(x,y)}^{\gamma(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_0^{\gamma(x,y)} [f(x, y, z)+f(x, y, -z)]\, dz\, dy\, dx.$$

Como $f(x, y, z) = -f(x, y, -z)$, la última integral es 0. Por consiguiente, toda la integral triple es 0.

18. (a) El volumen puede calcularse como una integral triple con $f(x, y, z) = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{xy} dz\, dy\, dx &= \int_0^1 \int_0^1 \left(z\Big|_{z=0}^{xy} \right) dy\, dx = \int_0^1 \int_0^1 xy\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2}\Big|_{y=0}^{1} \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(b) La integral de z sobre W es

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{xy} z\, dz\, dy\, dx &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{xy} \right) dy\, dx = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2y^2}{2} dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2y^3}{6}\Big|_{y=0}^{1} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{6} dx = \frac{x^3}{18}\Big|_0^1 = \frac{1}{18}.\end{aligned}$$

6.2 Geometría de las funciones de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$

OBJETIVOS

1. Poder determinar si un mapeo es uno a uno.

2. Graficar la imagen D de una región D^* en algún mapeo.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Notación.* La igualdad $D = T(D^*)$ expresa el hecho de que T toma un punto en D^* y lo mapea en un punto en D y que *todos* los puntos de D se obtienen de esta manera. T se llama mapeo o transformación. Podemos pensar T como una función y es similar a $y = f(x)$ para $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

2. *Uno a uno.* Si dos puntos distintos se mapean sobre puntos distintos, es decir, puntos distintos nunca se mapean en el mismo punto, entonces decimos que la función es uno a uno. El dominio se debe elegir con mucho cuidado para que se cumpla esta propiedad. (Véase el ejemplo 3.) Ésta es una propiedad muy agradable en integración, porque cuando no se tiene, la integral doble sobre D puede ser diferente de la integral doble sobre D^*.

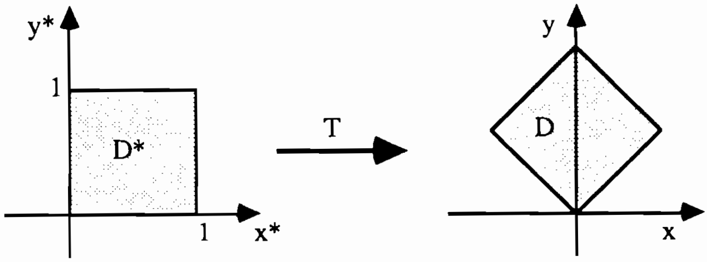
3. *Sobre.* Si todo punto del rango D es imagen de un punto del dominio D^*, entonces el mapeo es sobre. La propiedad de ser sobre no implica la de ser uno a uno porque dos puntos de D^* se pueden mapear sobre un punto de D. De manera similar, la propiedad de ser uno a uno tampoco implica la de ser sobre.

4. *Cómo encontrar D a partir de D^*.* En ocasiones, el rango D se puede determinar con sólo mapear la frontera de D^*. Entonces determinamos si el mapeo lleva a D^* hacia puntos que están fuera o dentro de la frontera de D. Por ejemplo, sea D el disco unitario. Si
$$T(x, y) = \left(\frac{1}{x^2 + y^2}, \frac{1}{x^2 + y^2}\right),$$
entonces T mapea el círculo unitario sobre el círculo unitario, y T mapea un punto como $(1/2, 1/2)$ en $(2, 2)$, un punto fuera del círculo. Por lo tanto T mapea el interior del círculo en el exterior de éste (y no se define en $(0, 0)$).

5. *Ejercicio importante.* El resultado del ejercicio 6 se usa en los ejemplos de la sección 6.3. Establece que si $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, entonces T es uno a uno si y sólo si $\det A \neq 0$. El resultado es verdadero para todas las matrices de $n \times n$.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

2. La transformación está dada por la ecuación siguiente:
$$T(x^*, y^*) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/-\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}.$$
Calculamos $\det A = 1 \neq 0$, de donde, por el teorema 1, la transformación lineal mapea vértices en vértices. El origen de D^* se mapea en $T(0, 0) = (0, 0)$ en D. De manera similar, los puntos $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$ de D^* se mapean en $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(0, \sqrt{2})$ y $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, respectivamente, en D. Es fácil demostrar que la longitud de cada lado de la imagen es 1 y poder usar el producto punto para demostrar que los ángulos son $\pi/2$. Entonces, T rota el cuadrado unitario 45 grados.



4. Los vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$ de D deben ser imágenes de los vértices $(0, 0)$, $(8/5, 4/5)$, $(12/5, 16/5)$ y $(4/5, 12/5)$ de D^*. Queremos encontrar una matriz A de modo que
$$T(x^*, y^*) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}.$$
Cuando $(8/5, 4/5)$ se mapea en $(1, 0)$, obtenemos $8a/5 + 4b/5 = 1$ y $8c/5 + 4d/5 = 0$ de modo que $d = -2c$. Cuando $(4/5, 12/5)$ se mapea en $(0, 1)$, obtenemos $4a/5 + 12b/5 = 0$ y $4c/5 + 12d/5 = -4c = 1$, o $a = -3b$ y $c = -1/4$, $d = 1/2$. Sustituimos $a = -3b$ en $8a/5 + 4b/5 = 1$ y obtenemos $-4b = 1$ o $b = -1/4$, y entonces $a = 3/4$. Por lo tanto,
$$T(x^*, y^*) = \left(\frac{3}{4}x^* - \frac{1}{4}y^*, \frac{-1}{4}x^* + \frac{1}{2}y^*\right).$$

7. Como aparecen senos y cosenos, trataremos de usar la identidad $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$ con objeto de eliminar parámetros y obtener una forma más reconocible: $x^2 + y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi$ y $x^2 + y^2 + z^2 = \rho(\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi) = \rho^2$. Sabemos que $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ es una esfera de radio ρ; como $0 \leq \rho \leq 1$, D es la bola unitaria. T no es uno a uno. Por ejemplo, $(0, \pi, \pi/2)$ y $(0, \pi/6, \pi/5)$ se mapean en el origen. También $(1, 0, \pi/2)$ y $(1, 2\pi, \pi/2)$ se mapean en $(1, 0, 0)$. Como $\rho = 0$ siempre se mapea en el origen, queremos eliminar dicho punto. Como $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$ también tienen la misma imagen, debemos eliminar uno de estos puntos. Por lo tanto, T se puede hacer uno a uno usando los intervalos siguientes: $\varphi \in [0, \pi]$, $\theta \in (0, 2\pi]$ y $\rho \in (0, 1)$.

10. Escribimos $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} = (q_1, q_2) = (p_1, p_2) + \lambda(v_1, v_2) + \mu(w_1, w_2)$. Entonces tenemos
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \end{bmatrix}.$$
La primera componente del lado derecho se puede escribir en la forma $(a_{11}p_1 + a_{12}p_2) + \lambda(a_{11}v_1 + a_{12}v_2) + \mu(a_{11}w_1 + a_{12}w_2)$. Podemos plantear la ecuación para la segunda componente de manera similar. Entonces, el vector del lado derecho se puede expresar en la forma $(a_{11}p_1 + a_{12}p_2, a_{21}p_1 + a_{22}p_2) + \lambda(a_{11}v_1 + a_{12}v_2, a_{21}v_1 + a_{22}v_2) + \mu(a_{11}w_1 + a_{12}w_2, a_{21}w_1 + a_{22}w_2)$, la cual tiene la forma $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{s} + \mu\mathbf{t}$. Así,

la transformación no altera la forma de los vectores que describen cada punto, y mapea paralelogramos en paralelogramos. Recuerda que cuando λ y μ toman sus valores, obtenemos un paralelogramo.

6.3 Teorema del cambio de variables

OBJETIVOS

1. Dada una transformación T, calcular su jacobiano.

2. Saber usar el jacobiano para hacer cambios de variables en integrales dobles y triples.

3. Saber enunciar y usar la fórmula del cambio de variables para coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Repaso.* Debes repasar las definiciones de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas de la sección 1.4.

2. *Jacobiano.* El jacobiano es un determinante, no una matriz. En esta sección introducimos la notación
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)},$$
que representa a los determinantes
$$\begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial w \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial w \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial w \end{vmatrix},$$
respectivamente.

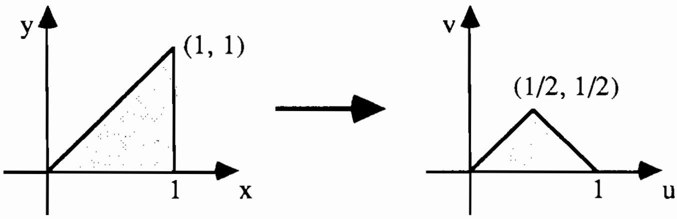
3. *Cambio de variables.* Tal como se enunció, el teorema del cambio de variables necesita que T sea uno a uno. Sin embargo, el teorema es válido si T es uno a uno sólo en la frontera de D^*, situación que se presenta en cantidad de ejemplos. Un teorema similar es válido para integrales triples.

4. *Cambios de variables útiles.* Si aparece $x^2 + y^2$ en el integrando, trata de usar coordenadas cilíndricas o polares, que tiene el jacobiano r. Si aparece $x^2+y^2+z^2$ en el integrando, trata de usar coordenadas esféricas, que tienen el jacobiano ρ^2 sen φ. Debes memorizar estos dos jacobianos.

5. *Límites de integración.* Cuando establezcas los límites de integración, recuerda que φ se mide respecto al "polo norte", *y no* respecto al "ecuador". También recuerda que θ se mide en dirección opuesta al giro de las manecillas del reloj.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

2. Sabemos que $x = u + v$ y $y = u - v$. Si sumamos las dos ecuaciones obtenemos $(x+y)/2 = u$ y si restamos nos da $(x-y)/2 = v$. Si mapeamos el borde del triángulo en el plano xy, obtenemos otro triángulo en el plano uv, como se muestra en la figura:



El jacobiano es el valor absoluto de

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

de manera que el jacobiano es 2. En este caso integramos $x + y = 2u$ de la manera siguiente:

$$\int_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^{1/2}\int_v^{1-v} (2u)(2)\,du\,dv = 4\int_0^{1/2}\int_v^{1-v} u\,du\,dv$$

$$= 4\int_0^{1/2}\left(\frac{u^2}{2}\Big|_{u=v}^{1-v}\right)dv = 2\int_0^{1/2}(1-2v)\,dv = (2v - v^2)\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2}.$$

No olvides que el jacobiano es el *valor absoluto* del determinante. Un cálculo directo nos da

$$\int_0^1\int_y^1 (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1\left[\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Big|_{x=y}^1\right]dy = \int_0^1\left(\frac{1}{2}+y-\frac{3y^2}{2}\right)dy$$

$$= \left(\frac{y}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

3. (b) Tenemos que $x - y = 2u - 3v$ y el jacobiano es

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

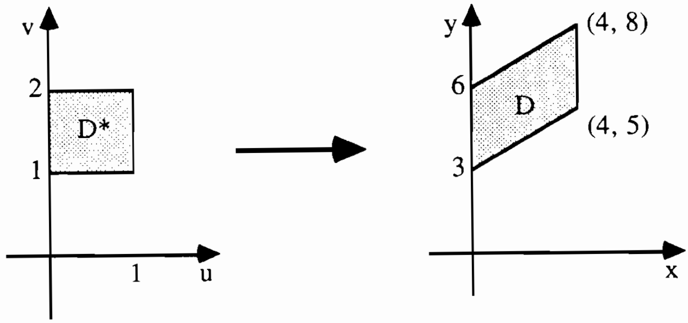
Por lo tanto, la integral se transforma en

$$12\int_0^1\int_1^2 (2u-3v)\,dv\,du = 12\int_0^1\left[\left(2uv-\frac{3v^2}{2}\right)\Big|_{v=1}^2\right]du$$

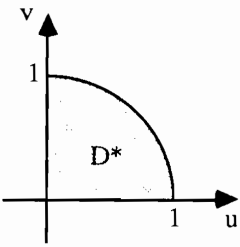
$$= 12\int_0^1\left(2u-\frac{9}{2}\right)du = 12\left(u^2-\frac{9u}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$= 12\left(1-\frac{9}{2}\right) = -42.$$

Observa que no es necesario saber cuál es el aspecto de D para realizar la integración. Por el teorema 1 de la sección 6.2, esta transformación lineal mapea el rectángulo D^* en un paralelogramo D. Mapeamos los vértices y los conectamos para obtener D.



7.



Tenemos que $x^2 + y^2 = (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2$, y por lo tanto $\sqrt{x^2 + y^2} = u^2 + v^2$. En este caso el jacobiano es

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2.$$

En consecuencia,

$$\int_{D^*} \frac{4(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2} du\, dv = 4 \int_{D^*} du\, dv.$$

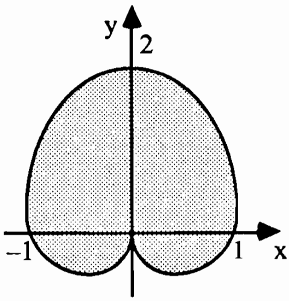
Esto es justo 4 veces el área de D^*, la cual es un cuarto del círculo unitario, por lo que la respuesta es π.

11. La región está dibujada en la página siguiente. La transformación mapea (x, y) en $(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, por tanto, el jacobiano es

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Recuerda que el área es la integral doble $\int_D dx\, dy$. En coordenadas polares esto se transforma en

$$\int_{D^*} r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\mathrm{sen}\,\theta} r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}\bigg|_{r=0}^{1+\mathrm{sen}\,\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 + \mathrm{sen}\,\theta)^2 d\theta.$$



Usamos la fórmula de la mitad de un ángulo para obtener

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\operatorname{sen}\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3\theta}{2}-2\cos\theta-\frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{3\pi}{2}.$$

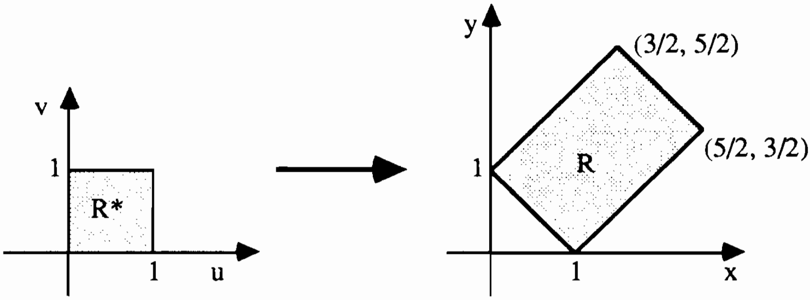
Comparamos esta respuesta con las fórmulas del área deducidas en el cálculo de una variable.

14. Cuando $D^* = [0,1]\times[0,2\pi]$ se mapea en el círculo unitario, sabemos que estamos usando cooredenadas polares

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+r^2)^{3/2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2\left(u^{3/2}\frac{du}{2}\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{u^{5/2}}{5}\Big|_{u=1}^2\right)d\theta$$
$$=\frac{4\sqrt{2}-1}{5}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{2\pi(4\sqrt{2}-1)}{5}.$$

17. En este ejercicio, tomamos el cuadrado unitario y queremos encontrar todas las transformaciones que lo mapean en la región dada R, un paralelogramo. Observa que podemos mapear $(0,0)$ en $(1,0)$, $(1,0)$ en $(5/2,3/2)$, $(0,1)$ en $(0,1)$ y $(1,1)$ en $(3/2,5/2)$. La transformación debe ser lineal, de modo que debemos obtener $(x,y)=(au+bv+c, du+ev+f)$. Cuando $(u,v)=(0,0)$ se mapea en $(x,y)=(1,0)$, vemos que $c=1$. Si mapeamos $(1,0)$ en $(5/2,3/2)$ obtenemos $a=3/2$ y si mapeamos $(0,1)$ en $(0,1)$ nos da $b=-1$. Podemos determinar d, e y f de manera similar. La transformación es $(3u/2-v+1, 3u/2+v)$, por lo tanto el jacobiano es

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} 3/2 & -1 \\ 3/2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$



También calculamos $x+y=3u+1$ y $x-y=1-2v$, en consecuencia el cambio de variable nos da

$$3\int_0^1\int_0^1 (3u+1)^2 e^{1-2v}\,du\,dv.$$

Como el integrando se puede factorizar en factores que contienen sólo una variable y los límites de integración son constantes, obtenemos

$$\begin{aligned}3\left(\int_0^1 (3u+1)^2 du\right)\left(\int_0^1 e^{1-2v}dv\right) &= 3\left(\frac{(3u+1)^3}{9}\bigg|_0^1\right)\left(\frac{e^{1-2v}}{-2}\bigg|_0^1\right)\\ &= 3\left(\frac{64-1}{9}\right)\left(\frac{e^{-1}-e^1}{-2}\right)=\frac{21}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right).\end{aligned}$$

Un método alternativo es tomar $u=x+y$, $v=x-y$. Luego $1\le u\le 4$ y $-1\le v\le 1$ y el jacobiano es $1/2$.

23. Usaremos coordenadas esféricas. La región S se puede describir mediante

$$a\le\rho\le b,\quad 0\le\theta\le 2\pi \quad \text{y} \quad 0\le\varphi\le\pi.$$

El jacobiano para coordenadas esféricas es ρ^2 sen φ, por tanto, la integral se transforma en

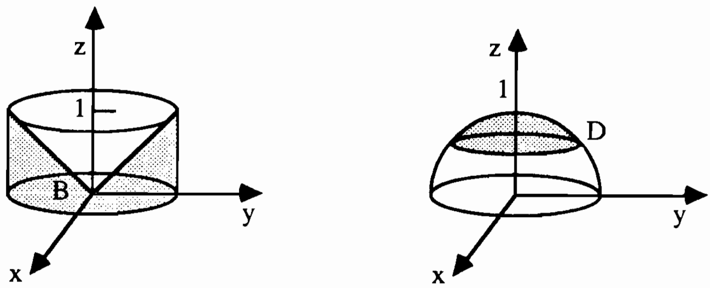
$$3\int_a^b\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2 \operatorname{sen}\varphi}{\rho^3}\,d\theta\,d\varphi\,d\rho.$$

Como los límites de integración son constantes, podemos factorizar la integral de la manera siguiente:

$$\left(\int_a^b \frac{d\rho}{\rho}\right)\left(\int_0^\pi \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)=\ln\left(\frac{b}{a}\right)\cdot 2\cdot 2\pi = 4\pi\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

26. El jacobiano para el cambio a coordenadas cilíndricas es r.
   (a) Después de graficar B vemos que esta región está sobre el círculo unitario (observa el dibujo de la página siguiente) y z varía desde 0 hasta $\sqrt{x^2+y^2}=r$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_B z\,dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^r rz\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{rz^2}{2}\bigg|_{z=0}^r\right)dr\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r^3}{3}dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{8}\bigg|_{r=0}^1\right)d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$



(a) (b)

(b) La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ equivale a $r^2 + z^2 \leq 1$ (véase la gráfica de D en la figura anterior). Si despejamos r, obtenemos $r \leq \sqrt{1 - z^2}$. Igualmente, el integrando es $1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1/\sqrt{r^2 + z^2}$. Por consiguiente, el cambio de variable nos da

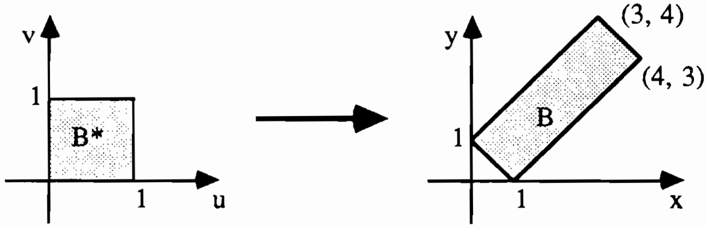
$$\int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr\, dz\, d\theta.$$

Sea $u = r^2 + z^2$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 \int_{z^2}^1 \frac{1}{2\sqrt{u}} du\, dz\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 \left(\sqrt{u}\Big|_{u=z^2}^1 \right) dz\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 (1 - z)\, dz\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\left(z - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=1/2}^1 \right] d\theta \\
&= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

27. Queremos encontrar un mapeo del cuadrado unitario B^* en el rectángulo B. Queremos mapear $(0, 0)$ en $(1, 0)$, $(1, 0)$ en $(4, 3)$, $(1, 1)$ en $(3, 4)$ y $(0, 1)$ en $(0, 1)$. Queremos una transformación lineal que mapee paralelogramos en paralelogramos. El mapeo que necesitamos es $(x, y) = (au + bv + c, du + ev + f)$. Si la imagen de $(u, v) = (0, 0)$ es $(x, y) = (1, 0)$, obtenemos $c = 1$. Si mapeamos $(1, 0)$ en $(4, 3)$ obtenemos $a = 3$ y si mapeamos $(0, 1)$ en $(0, 1)$ nos da $b = -1$. Podemos determinar d, e y f de manera similar. Obtenemos $(x, y) = (3u - v + 1, 3u + v)$. El jacobiano es

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$



Entonces la integral se cambia a

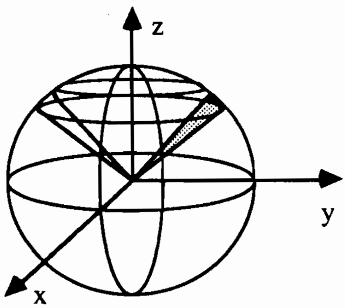
$$6\int_0^1\int_0^1 (6u+1)du\,dv = 6\int_0^1 \left[(3u^2+u)\Big|_{y=0}^{1}\right] dv = 6\int_0^1 4\,dv = 24.$$

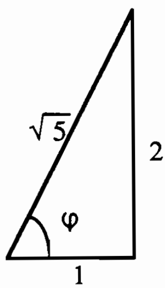
30. En el primer octante de $\mathbf{R}^3$, la coordenada esférica θ toma valores entre 0 y $\pi/2$. La región de integración que necesitamos se dibuja en la página siguiente. Recuerda que el jacobiano para coordenadas esféricas es ρ^2 sen φ, por lo tanto la integral es

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\tan^{-1}(2)}\int_0^{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{\rho}\right)\rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta &= \int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\tan^{-1}(2)}\int_0^{\sqrt{6}} \rho \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\tan^{-1}(2)} \left(\frac{\rho^2}{2}\operatorname{sen}\varphi\Big|_{\rho=0}^{\sqrt{6}}\right) d\varphi\, d\theta \\
&= 3\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\tan^{-1}(2)} \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta \\
&= 3\int_0^{\pi/2}\left(-\cos\varphi\Big|_{\pi/4}^{\tan^{-1}(2)}\right) d\theta.
\end{aligned}$$

Del siguiente triángulo que muestra $\varphi = \tan^{-1}(2)$, obtenemos:

$$3\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{3\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$





6.4 Aplicaciones de las integrales dobles y triples

OBJETIVOS

1. Saber usar integrales dobles y triples para calcular promedios, centros de masa, momentos de inercia y potencial gravitacional.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Promedios.* En general, un promedio se define como la integral de f dividida entre la integral de 1. Por lo tanto, las dos fórmulas de promedio dadas en esta sección son

$$\frac{\int_W f\,dV}{\int_W dV} \quad \text{y} \quad \frac{\int_D f\,dA}{\int_D dA}.$$

2. *Centro de masa.* Es un promedio ponderado. En general, el centro de masa de una región en $\mathbf{R}^n$ es $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_n)$, donde $\bar{x}_i$ se define como

$$\frac{\int_R x_i \rho\,dV}{\int_R \rho\,dV},$$

$dV = dx_1\,dx_2 \cdots dx_n$ y R es la región. Como ρ es la densidad, $\int_R \rho\,dV$ es la masa.

3. *Momentos de inercia.* Una buena regla para recordar $I_x = \int_W \rho(x^2 + z^2)\,dV$ es notar que el integrando no tiene término en x. De manera similar, I_y y I_z no tienen términos en y y en z, respectivamente.

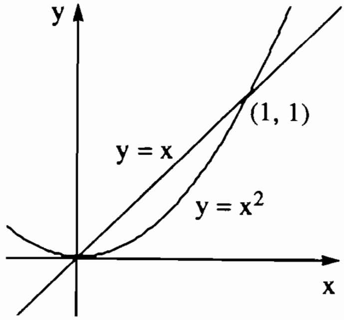
4. *Potencial gravitacional.* Su fórmula es $V = GM/R$. Aún cuando no sea necesario entender la teoría física en la cual se apoya su explicación, debes comprender la parte matemática. Es probable que no necesites reproducir su explicación en un examen.

5. *Geometría.* Recuerda que si el integrando es 1, entonces la integral triple $\iiint_W dV$ nos da el volumen de W. De manera similar, la integral doble $\iint_D dA$ nos da el área de D.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

3. Las fórmulas usadas para calcular el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ para una región en el plano son

$$\frac{\iint_D x\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy} \quad \text{y} \quad \frac{\iint_D y\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy}.$$



En este caso, graficamos la región D y vemos que se puede describir como

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad x^2 \leq y \leq x.$$

El numerador de $\bar{x}$ es

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x x(x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{x^2}^x (x^2+xy)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\left(x^2 y + \frac{xy^2}{2} \right) \Big|_{y=x^2}^{x} \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3x^3}{2} - x^4 - \frac{x^5}{2} \right) dx = \left(\frac{3x^4}{8} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{12} \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{120}.$$

El denominador de $\bar{x}$ es

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x^2}^{x} \right] dx = \int_0^1 \left(\frac{3x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{18}{120}.$$

Entonces, $\bar{x}$ es $11/18$. Te dejamos que calcules que $\bar{y} = 65/126$.

6. La masa del plato es $\int_D \rho\, dA$, cuyo valor es

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (y^2 \operatorname{sen}^2 4x + 2)\,dy\,dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{y^3}{3} \operatorname{sen}^2 4x + 2y \right) \Big|_0^{\pi} dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} \operatorname{sen}^2 4x + 2\pi \right) dx.$$

Si recordamos que $\operatorname{sen}^2 t = (1 - cos 2t)/2$, tenemos

$$\frac{\pi^3}{3} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx + 2\pi \int_0^{2\pi} dx = \frac{\pi^3}{3} \left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{8} \right) \Big|_0^{2\pi} + 4\pi^2 = \frac{\pi^4}{3} + 4\pi^2.$$

El área del plato es $2\pi \times 2\pi = 4\pi^2$. Por lo tanto, la densidad promedio es masa/área, o $\pi^2/12 + 1$.

7. (a) Sea ρ la densidad de la caja, entonces la masa es $\int_W \rho\, dV$, cuyo valor es

$$\rho \int_0^{1/2} \int_0^1 \int_0^2 dz\, dy\, dx = \rho \left(\frac{1}{2}\right)(1)(2) = \rho.$$

(b) También es este caso la masa es $\int_W \rho\, dV$, cuyo valor es

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/2} \int_0^1 \int_0^2 (x^2 + 3y^2 + z + 1) dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^{1/2} \int_0^1 \left[\left((x^2 + 3y^2 + 1)z + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{2} \right] dy\, dx \\
&= \int_0^{1/2} \int_0^1 2(x^2 + 3y^2 + 2) dy\, dx \\
&= 2 \int_0^{1/2} \left[\left((x^2 + 2)y + y^3 \right) \Big|_{y=0}^{1} \right] dx \\
&= 2 \int_0^{1/2} (x^2 + 3)\, dx = 2 \left(\frac{x^3}{3} + 3x \right) \Big|_0^{1/2} \\
&= 2 \left(\frac{1}{24} + \frac{3}{2} \right) = \frac{37}{12}.
\end{aligned}$$

11. El valor promedio de f sobre W es $\int_w f(x, y, z) dV / \int_w dV$. El numerador es

$$\int_0^2 \int_0^4 \int_0^6 \operatorname{sen}^2 \pi z \cos^2 \pi x dz\, dy\, dx.$$

Como $f(x, y, z)$ se puede factorizar de tal manera que cada factor contenga una sola variable y los límites de integración sean constantes, obtenemos

$$\left(\int_0^2 \cos^2 \pi x\, dx \right) \left(\int_0^4 dy \right) \left(\int_0^6 \operatorname{sen}^2 \pi z\, dz \right).$$

Usando las fórmulas de la mitad de un ángulo obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left[\int_0^2 \left(\frac{1 + \cos 2\pi x}{2} \right) dx \right] \left[\int_0^4 dy \right] \left[\int_0^6 \left(\frac{1 - \cos 2\pi z}{2} \right) dz \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(x + \frac{\operatorname{sen} 2\pi x}{2\pi} \right) \Big|_0^2 \right] \left[y \Big|_0^4 \right] \frac{1}{2} \left[\left(z - \frac{\operatorname{sen} 2\pi z}{2\pi} \right) \Big|_0^6 \right] = \frac{1}{2}(2)(4)\frac{1}{2}(6) = 12.
\end{aligned}$$

El denominador es justamente el volumen de W, el cual es $2(4)(6) = 48$, así que el promedio es $12/48 = 1/4$.

14. El momento de inercia alrededor del eje y está dado por

$$I_y = \int_W \rho(x^2 + z^2)dx\,dy\,dz.$$

Como W es la bola de radio R, usaremos las coordenadas esféricas (r, θ, φ). (Usaremos r debido a que ρ ya se usó para la densidad.) Como $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, podemos volver a escribir el integrando como $\rho(x^2 + z^2) = \rho(r^2 - y^2)$. Por lo tanto, el momento de inercia es

$$\begin{aligned}
&\rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}(r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\theta)r^2 \operatorname{sen}\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta \\
&\quad = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}(r^4 \operatorname{sen}\varphi - r^4 \operatorname{sen}^3\varphi \operatorname{sen}^2\theta)dr\, d\varphi\, d\theta \\
&\quad = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{r^5}{5}\Big|_{r=0}^{R}\right)(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi \operatorname{sen}^2\theta)\right] d\varphi\, d\theta \\
&\quad = \frac{\rho R^5}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi \operatorname{sen}^2\theta)d\varphi\, d\theta.
\end{aligned}$$

Para terminar la integral, usa las identidades $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$ y la fórmula de la mitad del ángulo: $\operatorname{sen}^2 t = (1 - \cos 2t)/2$:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho R^5}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\varphi(1 - \cos^2\varphi)\operatorname{sen}^2\theta]d\varphi\, d\theta \\
&= \frac{\rho R^5}{5}\int_0^{2\pi}\left[\left(-\cos\varphi + \operatorname{sen}^2\theta\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\right)\Big|_{\varphi=0}^{\pi}\right] d\theta \\
&= \frac{\rho R^5}{5}\int_0^{2\pi}\left(2 - \frac{4}{3}\operatorname{sen}^2\theta\right) d\theta = \frac{\rho R^5}{5}\int_0^{2\pi}\left[2 - \frac{2}{3}(1 - \cos 2\theta)\right] d\theta \\
&= \frac{\rho R^5}{5}\left[2\theta - \frac{2}{3}\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{3}\right]\Big|_0^{2\pi} = \frac{8\rho R^5\pi}{15}.
\end{aligned}$$

19. De la solución del ejemplo 7, $V(0, 0, R) = 4\pi G\rho(r_2^3 - r_1^3)/3R$, donde r_1 y r_2 son las distancias al origen, ρ es la constante de densidad y $(0, 0, R)$ es un punto fuera del planeta. La solución del ejemplo 7 también nos dice que

$$\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{r^2 - 2Rr\cos\varphi + R^2}} = \frac{r + R - |r - R|}{Rr} = \frac{2}{R} \quad \text{si} \quad R > r.$$

Cuando $0 \leq r \leq 10^4$, el potencial gravitacional es $4\pi G(3)[(10^4)^3 - (0)^3]/3R = (r\pi G \times 10^{12})/R$. Cuando $10^4 \leq r \leq 5 \times 10^8$, el potencial gravitacional es

$$2\pi G \int_{10^4}^{5\times 10^8} \left[\frac{r^2 \left(\frac{3\times 10^4}{r}\right) \left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi\right)}{\sqrt{r^2 - 2Rr\cos\varphi + R^2}} \right] dr.$$

(otro resultado del ejemplo 7). Es decir

$$2\pi G \int_{10^4}^{5\times 10^8} r^2 \left(\frac{3 \times 10^4}{r}\right) \left(\frac{2}{R}\right) dr = (6 \times 10^4)\pi G \int_{10^4}^{5\times 10^8} \frac{2r}{R} dr$$

$$= (6 \times 10^4) \frac{\pi G}{R} r^2 \bigg|_{r=10^4}^{5\times 10^8} \approx (1.5 \times 10^{22}) \frac{\pi G}{R}.$$

El potencial desde el centro del planeta es despreciable, porque 10^4 es mucho menor que 5×10^8, por tanto, $V(0, 0, R) = (4.71 \times 10^{22})G/R$.

6.5 Integrales impropias

OBJETIVOS

1. Poder definir y calcular una integral impropia.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Comparaciones.* Una integral de una función de una variable se llama impropia si la función tiende a infinito en algún punto o si los límites de integración son infinitos. La diferencia en este caso es que la función puede tender a infinito en una curva o en una superficie.

2. *Cálculos.* Si la integral existe, se calcula de la manera usual y se busca el valor límite en lugar de sustituir los límites directamente. El teorema de Fubini también es válido para integrales impropias.

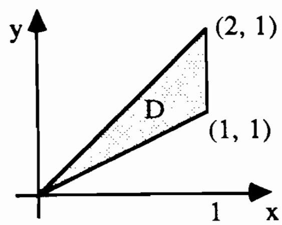
3. *Cuando f tiende a infinito.* Recuerda que f puede tender a infinito dentro de los límites de integración. En este caso, es necesario dividir la región en los puntos en los que f es infinita. Por ejemplo,

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{x}{y} dy\, dx = \int_0^1 \int_{-1}^0 \frac{x}{y} dy\, dx + \int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{y} dy\, dx.$$

Observa qué ocurre si evalúas la antiderivada en ± 1 y no consideras $y = 0$.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (c)



Esta integral es impropia en $x = 0$. Graficamos la región y vemos que es del tipo 1, la cual se describe como

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad \frac{x}{2} \leq y \leq x.$$

Entonces, la integral es

$$\int_0^1 \int_{x/2}^x \frac{y}{x} dy\, dx = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2x}\bigg|_{y=x/2}^{x} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2x} - \frac{(x^2/4)}{2x} \right) dx = \int_0^1 \frac{3x}{8} dx = \frac{3x^2}{16}\bigg|_0^2 = \frac{3}{16}.$$

2. (a) Si suponemos que D es una región del tipo 1, sería razonable pensar que $b = \infty$ como punto extremo. Luego podemos definir $\int_D f\, dA$ mediante

$$\int_a^\infty \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

(b) La región D es la que se describe en la parte (a). Como los límites de integración son constantes, podemos integrar cada variable y luego multiplicar los resultados. El integrando se puede factorizar de la manera siguiente:

$$xy \exp(-x^2 - y^2) = [x \exp(-x^2)][y \exp(-y^2)],$$

por lo tanto

$$\int_D f(x, y)\, dA = \left[\int_0^1 y \exp(-y^2)\, dy \right] \left[\int_1^\infty x \exp(-x^2)\, dx \right]$$

$$= \left(\frac{\exp(-y^2)}{-2}\bigg|_0^1 \right) \lim_{b \to \infty} \left(\frac{\exp(-x^2)}{-2}\bigg|_1^b \right) = \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \right).$$

5. El integrando se simplifica en $1/(x + y)$. El integrando es impropio cuando $y = -x$ o, para ser más específicos, en el punto $(0, 0)$ en D. Entonces

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{x + y} dy\, dx = \int_0^1 \left[\left(\ln|x + y| \right)\bigg|_{y=0}^{1} \right] dx = \int_0^1 \left[\ln|1 + x| - \ln(x) \right] dx.$$

Si integramos por partes, obtenemos

$$\left[\left((x + 1) \ln(x + 1) - x \right) - (x \ln x - x) \right]\bigg|_0^1.$$

De la regla de L'Hôpital sabemos que

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} = 0,$$

y la integral es $2\ln 2$.

8. Cuando $0 \leq g(x, y) \leq f(x, y)$, la integración sobre D nos debe dar

$$\int_D 0\, dA \leq \int_D g(x, y)\, dA \leq \int_D f(x, y)\, dA.$$

Sin embargo, como la integral de g es menor o igual que la integral de f y $\int_D g(x, y) dA$ no existe, llegamos a la conclusión de que $\int_D f(x, y)\, dA$ tampoco existe.

11. Como $x^2+y^2+z^2$ aparece en el integrando, trataremos de usar coordenadas esféricas. En el primer octante tenemos

$$0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad \text{y} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

Como $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, también tenemos $0 \leq \rho \leq a$. Recuerda que el jacobiano para coordenadas esféricas es $\rho^2 \operatorname{sen} \varphi$. Sustituimos $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y $\rho \cos \varphi = z$ y para obtener

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^a \frac{\rho^{1/2}}{\sqrt{\rho\cos\varphi + \rho^4}} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^a \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi + \rho^3}} d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

Sustituimos $u = \cos\varphi + \rho^3$:

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_{\cos\varphi}^{\cos\varphi + a^3} \frac{du \operatorname{sen}\varphi}{3\sqrt{u}} d\varphi\, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{2}{3} \operatorname{sen}\varphi \left(\sqrt{u}\Big|_{u=\cos\varphi}^{\cos\varphi + a^3} \right) d\varphi\, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{2}{3} \operatorname{sen}\varphi \sqrt{\cos\varphi + a^3} d\varphi\, d\theta - \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{2}{3} \operatorname{sen}\varphi \sqrt{\cos\varphi} d\varphi\, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{-4}{9} (\cos\varphi + a^3)^{3/2} \Big|_{\phi=0}^{\pi/2} + \frac{4}{9} (\cos\varphi)^{3/2} \Big|_{\phi=0}^{\pi/2} \right] d\theta$$
$$= \frac{2\pi}{9} \left[(1 + a^3)^{3/2} - a^{9/2} - 1 \right].$$

12. Como $x^2+y^2+z^2$ aparece en el integrando, trataremos de usar coordenadas esféricas. La región D se puede describir como

$$1 \le r \quad \text{y} \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad \text{y} \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

En coordenadas esféricas el integrando es $1/\rho^4$ y recuerda que el jacobiano es $\rho^2 \operatorname{sen} \varphi$. Por lo tanto, tenemos

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\infty} \frac{\rho \operatorname{sen} \varphi}{\rho^4}\, d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

Como todos los límites de integración son constantes, podemos integrar cada variable por separado y multiplicar los resultados:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\rho^2}\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi\right)\left(\int_1^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2}\right)$$

$$= 2\pi \left(-\cos \varphi\Big|_0^{\pi}\right) \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{\rho}\Big|_1^{b}\right) = 2\pi(2)(1) = 4\pi.$$

6.R Ejercicios de repaso del capítulo 6

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

2. Evaluar como integral iterada

$$\int_0^1\int_0^x\int_0^y (y+xz)\, dz\, dy\, dx = \int_0^1\int_0^x \left[\left(yz + \frac{xz^2}{2}\right)\Big|_{z=0}^{y}\right] dy\, dx$$

$$= \int_0^1\int_0^x \left(y^2 + \frac{xy^2}{2}\right) dy\, dx = \int_0^1 \left[\left(1+\frac{x}{2}\right)\frac{y^3}{3}\Big|_{y=0}^{x}\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6}\right) dx = \left(\frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{30}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{60}$$

5. El plano $x + y = 1$ se puede expresar en la forma $x = 1 - y$. En consecuencia, W se puede describir como

$$0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le 1 - y \quad \text{y} \quad 0 \le z \le \pi.$$

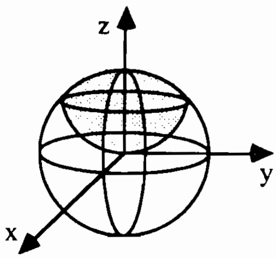
Por lo tanto, la integral deseada es

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\int_0^1\int_0^{1-y} x^2\cos z\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{\pi}\int_0^1 (\cos z)\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{1-y}\right)dy\,dz\\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\int_0^1 (\cos z)(1-y)^3dy\,dz\\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left[(\cos z)\frac{(1-y)^4}{-4}\Big|_{y=0}^{1}\right]dz\\ &= \frac{1}{12}\int_0^{\pi}\cos z\,dz = \frac{1}{12}\operatorname{sen} z\Big|_0^{\pi} = 0.\end{aligned}$$

Un método alternativo es integrar z primero:

$$\int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{\pi} x^2\cos z\,dz\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{1-y}\left(x^2\operatorname{sen} z\Big|_{z=0}^{\pi}\right)dx\,dy = \int_0^1\int_0^{1-y} 0dx\,dy = 0.$$

9.

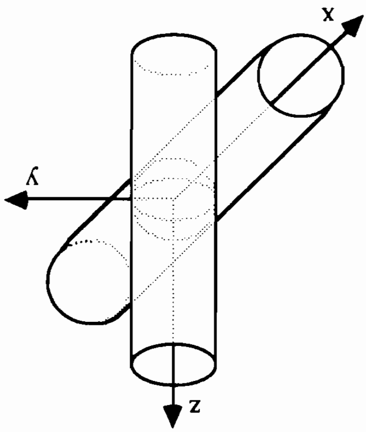


El volumen deseado se muestra en la figura. Las superficies se intersecan en $z = x^2 + y^2 = 2 - z^2$ o $z^2 + z - 2 = 0$ o $z = 1$. Descartamos $z = -2$ como solución porque queremos $z \geq 0$. De nuestro dibujo, podemos describir la región en coordenadas cilíndricas de la manera siguiente. Observa que la región entera está sobre el disco unitario. Además, la región está entre $z = x^2 + y^2 = r^2$ y $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} = \sqrt{2 - r^2}$, de manera que la región se puede describir como

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{y} \quad r^2 \leq z \leq \sqrt{2 - r^2}.$$

Como el jacobiano para coordenadas cilíndricas es r, tenemos

$$\begin{aligned}\int_W dv &= \int_0^1\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}\int_0^{2\pi} r\,d\theta\,dz\,dr = 2\pi\int_0^1\left(rz\Big|_{z=r^2}^{(2-r^2)^{1/2}}\right)dr\\ &= 2\pi\int_0^1\left(r\sqrt{2-r^2} - r^3\right)dr = 2\pi\left[\frac{-(2-r^2)^{3/2}}{3} - \frac{r^4}{4}\right]\Big|_0^1\\ &= \frac{\pi}{3}\left(4\sqrt{2} - \frac{7}{2}\right)\end{aligned}$$

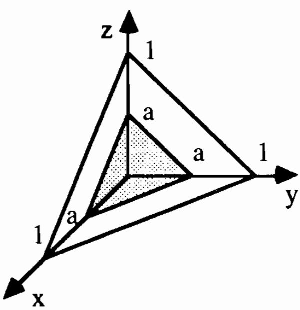
12. 

Giraremos uno de los cilindros, ya que esto es más conveniente cuando usamos coordenadas cilíndricas. En lugar de que el centro del cilindro sea el eje x, será el eje z. Podemos describir el cilindro horizontal en coordenadas cilíndricas como $x^2+z^2 = 4$ o $z = \pm\sqrt{4 - r^2\cos\theta}$. El jacobiano es r. El volumen es

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-\sqrt{4-r^2\cos^2\theta}}^{\sqrt{4-r^2\cos^2\theta}} r\,dz\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(rz\Big|_{z=-(4-r^2\cos^2\theta)^{1/2}}^{(4-r^2\cos^2\theta)^{1/2}} \right) dr\,d\theta$$
$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 r\sqrt{4 - r^2\cos^2\theta}dr\,d\theta.$$

Sea $u = 4 - r^2\cos^2\theta$, entonces $r\,dr = -du/2$ y obtenemos

$$2\int_0^{2\pi}\int_4^{4-4\cos^2\theta} \frac{\sqrt{u}}{-2}du\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{u^{3/2}}{-3}\Big|_{u=0}^{4-4\cos^2\theta}\right)d\theta$$
$$= \frac{-2}{3}\int_0^{2\pi}\left[(4 - 4\cos^2\theta)^{3/2} - \theta\right]d\theta$$
$$= \frac{-2}{3}\int_0^{2\pi}(8\operatorname{sen}^3\theta - 8)d\theta$$
$$= \frac{-16}{3}\int_0^{2\pi}\left[\operatorname{sen}\theta(1 - \cos^2\theta) - 1\right]d\theta$$
$$= \frac{-16}{3}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} - \theta\right]\Big|_0^{2\pi} = \frac{32\pi}{3}.$$

15. 

Cuando hacemos el corte mediante el plano $x+y+z = a$, el volumen del sólido (la parte sombreada) que está por debajo de dicho plano es

$$\int_0^a\int_0^{a-x}\int_0^{a-x-y} dz\,dy\,dx = \int_0^a\int_0^{a-x}(a-x-y)dy\,dx$$
$$= \int_0^a \left[\left((a - x)y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{a-x}\right]dx$$
$$= \int_0^a \frac{(a - x)^2}{2}dx.$$

Sustituimos $u = a - x$ y obtenemos

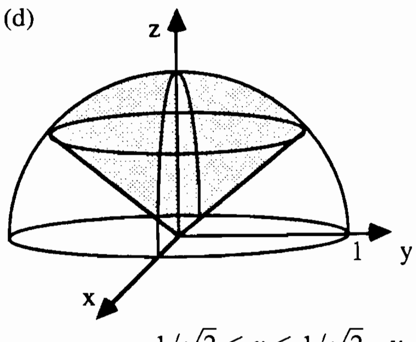
$$\frac{-1}{2}\int_{-a}^{0} u^2 du = \frac{-1}{2}\left(\frac{u^3}{3}\Big|_{-a}^{0}\right) = \frac{a^3}{6}.$$

Así, el volumen del sólido completo, cuando $a = 1$, es $1/6$. Si debemos cortar el sólido en n partes iguales, entonces el volumen que está debajo de $x+y+z = a$ debe ser $k/6n$, donde k es un entero tal que $1 \leq k \leq n-1$. Por lo tanto, $a^3/6 = k/6n$ implica que los cortes se deben hacer en los planos $x+y+z = (k/n)^{1/3}$

16. (a) Si dividimos entre x^2, el integrando se convierte en $(1/x)/[1+(z/x)^2]$. Sea $u = z/x$, entonces $x\,du = dz$ y la integral se transforma en

$$\int_0^1\int_0^y\int_0^{1/\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1+u^2}\right)du\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^y\left(\tan^{-1}u\Big|_{u=0}^{1/\sqrt{3}}\right)dx\,dy$$
$$= \frac{\pi}{6}\int_0^1\int_0^y dx\,dy = \frac{\pi}{6}\int_0^1\left(x\Big|_{x=0}^{y}\right)dy$$
$$= \frac{\pi}{6}\int_0^1 y\,dy = \frac{\pi}{6}\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right) = \frac{\pi}{12}.$$

18. (d)



Recordemos que el jacobiano para coordendas esféricas es $\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$ y $\operatorname{sen} 2\varphi = 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$. Factorizamos el jacobiano del integrando y nos queda $2\rho\cos\varphi$, el cual en coordenadas rectangulares se convierte en $2z$. De nuestro dibujo vemos que la región de integración está sobre el disco de radio $1/2$, con centro en el origen, de donde tenemos

$$-1/\sqrt{2} \leq x \leq 1/\sqrt{2} \quad \text{y} \quad -\sqrt{1/2-x^2} \leq y \leq \sqrt{1/2-x^2}.$$

Ahora, z se varía desde el cono hasta la esfera de radio 1. La ecuación del cono es $z = x^2+y^2$ y el hemisferio superior tiene ecuación $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, por lo tanto

$$x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Entonces la integral se transforma en

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{1/2-x^2}}^{\sqrt{1/2-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 2z\,dz\,dy\,dx.$$

21. (a) Esta integral impropia se puede evaluar de la manera siguiente:

$$\int_0^\infty \int_0^y x\exp(-y^3)\,dx\,dy = \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{y}\right)\exp(y^3)\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty y^2\exp(-y^3)\,dy = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{\exp(-y^3)}{-6}\Big|_0^b\right) = \frac{1}{6}.$$

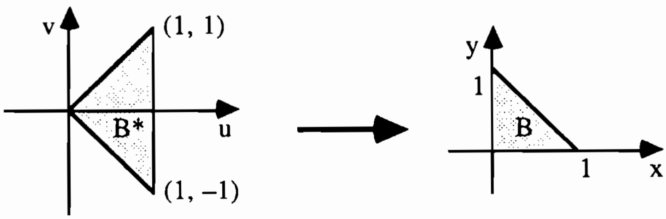
24. (a) Como estamos integrando sobre una región esférica, usaremos coordenadas esféricas y el jacobiano $\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$.

$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)xyz\,dV$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho^2(\rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi)(\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)(\rho\cos\varphi)\rho^2\operatorname{sen}\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho^7\cos\theta\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\operatorname{sen}^3\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

ya que todos los límites de integración son constantes, podemos integrar cada variable por separado y multiplicar los resultados. Entonces, la integral es

$$\left(\int_0^R \rho^7 d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\cos\varphi\operatorname{sen}^3\varphi\,d\varphi\right)$$
$$= \left(\frac{\rho^8}{8}\Big|_0^R\right)\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\Big|_0^{2\pi}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}^4\varphi}{4}\Big|_0^{\pi}\right) = 0.$$

27. Sea $u = x+y$, $v = y-x$ o $x = (u-v)/2$, $y = (u+v)/2$. El lector debe verificar que el jacobiano $|\partial(u,v)/\partial(x,y)|$ es $1/2$. De las figuras, $0 \le u \le 1$ y $-u \le v \le u$.



Entonces

$$\iint_D \exp\left[\frac{y-x}{y+x}\right]dx\,dy = \int_0^1\int_{-u}^{u}\frac{\exp(v/u)}{2}dv\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 u\left(e^{(v/u)}\Big|_{-u}^{u}\right)du$$
$$= \frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\int_0^1 u\,du = \frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

30. La masa total es la integral de la densidad. Como estamos integrando sobre una esfera, usaremos coordenadas esféricas. La esfera de radio R se describe como

$$0 \le \rho \le R, \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \text{y} \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

La distancia d desde el origen es igual a ρ y el Jacobiano es $\rho^2 \operatorname{sen} \varphi$. Por lo tanto, la masa total es

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \frac{\rho^2 \operatorname{sen} \varphi}{1+\rho^3} d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

Como todos los límites de integración son constantes, podemos integrar por separado cada variable y luego multiplicar los resultados. Obtenemos

$$\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi\right) \left(\int_0^{R} \frac{\rho^2}{1+\rho^3} d\rho\right) = (2\pi) \left[-\cos \varphi \Big|_0^{\pi}\right] \left[\frac{1}{3} \ln(1+\rho^3)\Big|_0^{R}\right]$$

$$= \frac{4\pi}{3} \ln(1+R^3).$$

33. (a) Sea $T(x, y, z)$ la temperatura en (x, y, z). Entonces la temperatura promedio es $\int_C T\, dV / \int_C dV$. Por definición, $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, de manera que $d^2 = x^2+y^2+z^2$ y $T(x, y, z) = 32(x^2+y^2+z^2)$. El numerador es

$$32 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$= 32 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left[\left(\frac{x^2}{3} + (y^2+z^2)x\right) \Big|_{x=-1}^{1}\right] dy\, dz$$

$$= 64 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{3} + y^2 + z^2\right) dy\, dz$$

$$= 64 \int_{-1}^{1} \left[\left(\left(\frac{1}{3} + z^2\right) y + \frac{y^3}{3}\right) \Big|_{y=-1}^{1}\right] dz$$

$$= 128 \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{3} + z^2\right) dz$$

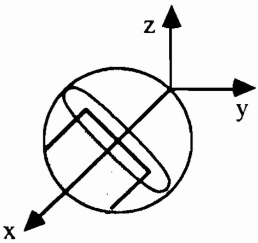
$$= 128 \left(\frac{2x}{3} + \frac{z^3}{3}\right) \Big|_{-1}^{1} = 256$$

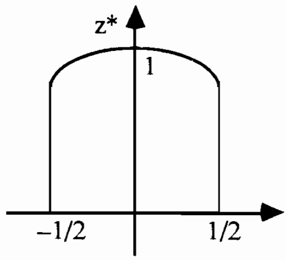
El denominador es justo el volumen del cubo C, que es 8, por lo tanto, la temperatura promedio en C es $256/8 = 32$.

(b) La temperatura promedio se alcanza siempre que $32d^2 = 32$ o $d = 1$. Entonces la temperatura promedio se alcanza en todos los puntos de la esfera de radio 1, con centro en el origen.

34. La desigualdad $y^2 + z^2 < 1/4$ describe el interior de un cilindro circular de radio $1/2$, con centro en el eje x. La desigualdad $(x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ representa a una bola de radio 1 con centro en $(1, 0, 0)$. También queremos $x \geq 1$, en consecuencia, obtenemos la región que aparece en la figura. Es fácil ver, por simetría, que $\bar{y} = \bar{z} = 0$. Con objeto de facilitar los cálculos, desplazaremos la región de manera que su eje de simetría esté sobre el eje z^* y colocaremos el centro de la bola menciondada anteriormente en el origen. De esta manera, el centro de masa de la nueva región D^* será la integral de z^* sobre D^* dividida entre el volumen de D^*. La región D^* se describe en términos de coordenadas cilíndricas como

$$0 \leq r \leq 1/2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{y} \quad 0 \leq z^* \leq \sqrt{1-r^2}.$$





El jacobiano es r, de manera que la integral z^* sobre D^* es

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} rz^* dz^* dr\, d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\left(\frac{r(z^*)^2}{2}\bigg|_{z^*=0}^{\sqrt{1-r^*}}\right) dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\left(\frac{r-r^3}{2}\right) dr\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\bigg|_{r=0}^{1/2}\right] d\theta \\
&= \frac{7}{128}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{7\pi}{64}.
\end{aligned}$$

El volumen de D^* es

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r\, dz^* dr\, d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\left(rz^*\bigg|_{z^*=0}^{\sqrt{1-r^2}}\right) dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{1/2} r\sqrt{1-r^2} dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{-(1-r^2)^{3/2}}{3}\bigg|_{r=0}^{1/2}\right] d\theta \\
&= \left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right).
\end{aligned}$$

La región D^* se desplazó hacia abajo 2 unidades, de manera que para la región original, $\bar{x}$ es

$$\frac{1}{2}+\frac{7\pi/64}{2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)}=\frac{1}{2}+\frac{7}{128\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)}.$$

39. Observa que x^2+y^2 aparece en el integrando, de manera que trataremos de usar coordenadas polares con jacobiano r. Interpretemos a $\mathbf{R}^2$ como un disco de radio infinito, por lo tanto, $\mathbf{R}^2$ se puede describir como

$$0 \leq r \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{r}{(1+r^2)^{3/2}}dr\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left[-\lim_{b\to\infty}(1+r^2)^{-1/2}\Big|_{r=0}^{b}\right]d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.\end{aligned}$$

CAPÍTULO 7
INTEGRALES SOBRE TRAYECTORIAS Y SUPERFICIES

7.1 La integral de trayectoria

OBJETIVOS

1. Poder calcular una integral de trayectoria.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Notación.* La integral de trayectoria se define por medio de $\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\, ds$, donde $ds = \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt$ y $\boldsymbol{\sigma}(t)$ es una trayectoria.

2. *Definición.* La integral de trayectoria es una integración de una función de *valores reales* que se efectúa sobre una curva. Sólo es necesario que el integrando f esté definido sobre $\boldsymbol{\sigma}$ y que f sea continua a trozos en $\boldsymbol{\sigma}$. Además, es necesario que $\boldsymbol{\sigma}$ sea continuamente diferenciable a trozos. La integración de funciones de *valores vectoriaes* se estudiará en la sección siguiente.

3. *Cómo calcular.* Si $\boldsymbol{\sigma}$ está definida para $a \leq t \leq b$ y f está definida en $\boldsymbol{\sigma}$, entonces la integral de trayectoria es
$$\int_a^b f(\boldsymbol{\sigma}(t))\, \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt.$$

4. *Relación con la longitud de arco.* Si $f = 1$, entonces la integral de trayectoria es la fórmula de la longitud de arco de la sección 3.2.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

2. (b) La integral de trayectoria está definida por
$$\int_a^b f(\boldsymbol{\sigma}(t))\, \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt.$$

En este caso, $f(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \cos t$, $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 1)$ y $\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| = [\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 1]^{1/2} = \sqrt{2}$. Por lo tanto, la integral de trayectoria es

$$\int_0^{2\pi} \cos t \cdot \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \operatorname{sen} t \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

3. (b) Sea $x = t$, $y = 3t$ y $z = 2t$. En este caso, $f = xy = (3t)(2t)$ y $ds = \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| = [1^2 + 3^2 + 2^2]^{1/2} = \sqrt{14}$. Entonces la integral de trayectoria es

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\, ds = \int_1^3 (3t)(2t)\sqrt{14} = 6\sqrt{14} \int_0^3 t^2\, dt = 2\sqrt{14} t^3 \Big|_1^3 = 52\sqrt{14}.$$

4. (a) Recuerda que en coordenadas polares,

$$x = r(\theta)\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r(\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

Aquí consideramos r como una función de θ, y por tanto

$$dx = \big(r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\operatorname{sen}\theta\big)d\theta$$

y

$$dy = \big(r'(\theta)\operatorname{sen}\theta - r(\theta)\cos\theta\big)d\theta.$$

También sabemos que

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2}d\theta \\
&= \big([r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\operatorname{sen}\theta]^2[r'(\theta)\operatorname{sen}\theta + r(\theta)\cos\theta]^2\big)^{1/2}d\theta \\
&= \big[(r'(\theta))^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2) + (r(\theta))^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\big]^{1/2}d\theta \\
&= \sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}d\theta.
\end{aligned}$$

Por tanto, la integral de trayectoria de $f(x, y) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ es

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} f(x, y)\, ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

7. (a) De $t = -1$ a $t = 0$, la trayectoria es una línea recta que va de $(1, 1, 1)$ a $(0, 0, 0)$; de $t = 0$ a $t = 1$, la trayectoria es una línea recta que va de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$, de modo que, en realidad, el mismo trayecto se recorre dos veces. Por lo tanto, la integral de trayectoria es

$$\begin{aligned}
\int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}dt &= 2\int_0^1 (2t^4 - t^4)\sqrt{(4t^3)^2 + (4t^3)^2}dt \\
&= 2\int_0^1 4t^4\sqrt{2t^6}dt = 8\sqrt{2}\int_0^1 t^7 dt = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Podemos interpretar la respuesta como el área que necesitamos cubrir si queremos pintar los dos lados de una cerca que se levanta sobre la trayectoria $x = t^4$, $y = t^4$, con altura $f\big(x(t), y(t)\big)$.

(b) La función longitud de arco es la integral de trayectoria cuando $f = 1$, por consiguiente, ésta es:

$$\int_a^b f\big(\boldsymbol{\sigma}(\tau)\big)\,\|\boldsymbol{\sigma}'(\tau)\|\,d\tau,$$

donde a es el punto de partida. Para evaluar $s(t)$ es necesario dividir el intervalo en $[-1,0]$ y $[0,1]$. Para $-1 \le t \le 0$, $\|\boldsymbol{\sigma}'(\tau)\| = \left[(4\tau^3)^2 + (4\tau^3)^2\right]^{1/2} = 4\sqrt{2}|\tau|^3 = -4\sqrt{2}\tau^3$, ya que también tenemos $-1 \le \tau \le 0$. Entonces

$$s(t) = -\int_{-1}^{t} 4\sqrt{2}\tau^3 d\tau = -\sqrt{2}(t^4 - 1).$$

Por tanto, $t^4 = s/\sqrt{2} + 1$ y $4t^3dt = -ds/\sqrt{2}$. Cuando $t = -1$, $s = 0$, y cuando $t = 0$, $s = \sqrt{2}$. Para $0 \le t \le 1$, $\|\boldsymbol{\sigma}'(\tau)\| = \left[(4\tau^3)^2 + (4\tau^3)^2\right]^{1/2} = 4\sqrt{2}\tau^3$. También necesitamos sumar la longitud de -1 a 0, entonces, para $0 \le t \le 1$, tenemos

$$s(t) = \sqrt{2} + \int_0^t 4\sqrt{2}\tau^3 d\tau = \sqrt{2}(t^4 + 1).$$

En consecuencia, $t^4 = s/\sqrt{2} - 1$ y $4t^3dt = ds/\sqrt{2}$. Cuando $t = 0$, $s = \sqrt{2}$, y cuando $t = 1$, $s = 0$. Si juntamos los dos resultados, la integral de trayectoria es

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left(-\frac{s}{\sqrt{2}} + 1\right) ds + \int_{\sqrt{2}}^{0} \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - 1\right) ds = \left(-\frac{s^2}{2\sqrt{2}} + s\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} + \left(\frac{s^2}{2\sqrt{2}} - s\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{0} = \sqrt{2}.$$

10. (a) Cuando la densidad es una constante k, tenemos

masa = $k \times$ longitud del alambre.

La longitud del alambre es

$$\int_a^b \|\boldsymbol{\rho}'(\theta)\|\,d\theta,$$

por lo tanto la masa es

$$2\int_0^{2\pi} \sqrt{0^2 + (a\cos\theta)^2 + (-a\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}\,d\theta = 2\int_0^{2\pi} a\,d\theta = 2a\pi.$$

(b) Recuerda que una coordenada del centro de masa, $\bar{x}_i$, es

$$\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}.$$

En este caso tenemos un alambre delgado en el plano yz. Por simetría, $\bar{x} = \bar{z} = 0$. En este caso, $y = a \operatorname{sen} \theta$, de modo que el centro de masa para y, con $k = 2$, es

$$\frac{\int ky\,ds}{\int k\,ds} = \frac{\int_0^\pi a \operatorname{sen}\theta \cdot 2a\,d\theta}{2a\pi} = \frac{a}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\,d\theta = \frac{2a}{\pi}.$$

Entonces el centro de masa es $(0, 2a/\pi, 0)$. Observa que el centro de masa *no* está en el alambre.

13. El truco de este ejercicio es usar el sistema de coordenadas correcto. La intersección de la esfera y el plano es un círculo unitario, pero con una orientación poco común. El vector unitario normal al plano $x + y + z = 0$ es $(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$, entonces necesitamos encontrar dos vectores ortogonales en el plano $x + y + z = 0$. Por ejemplo, $(1, 0, -1)$ y $(1, -2, 1)$ son un par. Si normalizamos, obtenemos $\mathbf{u} = (1, 0, -1)/\sqrt{2}$ y $\mathbf{v} = (1, -2, 1)/\sqrt{6}$. El círculo se parametriza como $\boldsymbol{\sigma}(\theta) = (x, y, z) = \cos\theta\mathbf{u} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{v}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Si tomamos la primera componente de $\boldsymbol{\sigma}$, obtenemos, $x = (\cos\theta)/\sqrt{2} + (\operatorname{sen}\theta)/\sqrt{6}$. Entonces la masa es

$$\begin{aligned}
\int_C x^2 ds &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{sen}\theta\right)^2 \|\boldsymbol{\sigma}'(\theta)\|\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{sen}\theta\right)^2 \cdot 1\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{12}} + \frac{1}{6}\operatorname{sen}^2\theta\right)^2 d\theta.
\end{aligned}$$

Debes verificar que $\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| = 1$. Ahora usamos las fórmulas de la mitad de un ángulo y obtenemos

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}\right) + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{12}} + \frac{1}{6}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi/3.$$

7.2 Integrales de línea

OBJETIVOS

1. Poder calcular una integral de línea.
2. Explicar la diferencia entre la integral de línea y la integral de trayectoria.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Definición.* La integral de línea está definida para campos vectoriales, mientras que la integral de trayectoria está definida para campos escalares. Es necesario que $\boldsymbol{\sigma}$ sea clase C^1 y $\mathbf{F}$ sea continua en $\boldsymbol{\sigma}$ (o al menos continua por trozos para $\boldsymbol{\sigma}$ y $\mathbf{F}$).

2. *Interpretación Física.* La integral de línea está asociada con el trabajo que realiza un campo $\mathbf{F}$ a lo largo de una trayectoria.

3. *Cómo calcular.* Si $\mathbf{F}$ está definido en $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ está definido para $a \leq t \leq b$, entonces la integral de línea es

$$\int_a^b \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt.$$

   Observa que el integrando es un producto punto, por lo cual la integral es un escalar. La fórmula en términos de $\mathbf{T}(t)$, la tangente unitaria, puede resultar más difícil de usar ya que es necesario calcular $\mathbf{T}(t)$ además de $\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|$.

4. *Interpretación del signo.* Trabajo positivo significa que el campo de fuerza ha realizado una cantidad neta de trabajo sobre el objeto; tal es el caso cuando el objeto se mueve en la dirección de la fuerza. Si el trabajo es negativo, entonces esa cantidad de trabajo la realiza el objeto sobre el campo de fuerza.

5. *Reparametrización y orientación.* Si reparametrizamos $\boldsymbol{\sigma}$ y no cambiamos la orientación, el valor de la integral de línea no cambia. Si invertimos la orientación, sólo el signo del valor de la integral de línea cambia. Puedes sustituir los puntos extremos para estar seguro de que la dirección es la correcta. La orientación no es importante en el caso de la integral de trayectoria de la sección anterior. El teorema sobre reparametrizaciones nos permite dividir una curva e integrar sobre cada segmento por separado, dando a cada uno una parametrización conveniente (véase el ejemplo 11). Asegúrate de que la curva se recorre el número correcto de veces.

6. *Gradientes.* La integral de línea de un campo gradiente depende sólo de los puntos extremos. Veremos cómo usar este hecho en la sección 8.3. A partir de esto se deduce que la integral de línea sobre una trayectoria cerrada es 0.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (a) La integral de línea de $\mathbf{F}$ sobre $\boldsymbol{\sigma}$ es

$$\int_0^1 \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt.$$

Tenemos $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t, t, t)$, entonces $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (1, 1, 1)$ y $\mathbf{F}\big(\boldsymbol{\sigma}(t)\big) = (t, t, t)$. Por lo tanto, la integral que se pide es

$$\int_0^1 (t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\, dt = \int_0^1 (t + t + t)\, dt = \frac{3}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

2. (c) Necesitamos dividir la integral en dos partes. Para el segmento de recta que une los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$, la manera más sencilla es encontrar una ecuación $\mathbf{l}(t) = \mathbf{u}(t) + t\mathbf{v}(t)$ tal que $\mathbf{l}(0) = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{l}(1) = (0, 1, 0)$. Si $\mathbf{u}(t) = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{v}(t) = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$, tenemos $\mathbf{l}_1(t) = (1, 0, 0) + t(-1, 1, 0)$ o $(x, y, z) = (1 - t, t, 0)$ para $0 \le t \le 1$, entonces $dx = -dt$, $dy = dt$ y $dz = 0$. Sustituimos estos valores y obtenemos

$$\int_{\mathbf{l}_1} (yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz) = \int_0^1 [t \cdot 0 \cdot (-dt) + (1 - t) \cdot 0 \cdot dt + (1 - t) \cdot t \cdot 0] = 0.$$

Para el segmento de recta que une a $(0, 1, 0)$ con $(0, 0, 1)$ usamos el mismo método. Encontramos $\mathbf{l}_2(t) = (0, 1, 0) + t(0, -1, 1)$ o $(x, y, z) = (0, 1 - t, t)$ para $0 \le t \le 1$, entonces $dx = 0$, $dy = -dt$ y $dz = dt$. Sustituimos estos valores y obtenemos

$$\int_{\mathbf{l}_2} (yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz) = \int_0^1 [(1 - t) \cdot t \cdot 0 + 0 \cdot t \cdot (-dt) + 0 \cdot (-t) \cdot dt] = 0.$$

Sumamos estas dos integrales de línea y obtenemos $0 + 0 = 0$.

4. (a) Por definición, tenemos

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F}\big(\boldsymbol{\sigma}(t)\big) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt.$$

Hemos obtenido que $\mathbf{F}$ y $\boldsymbol{\sigma}'$ son perpendiculares, por consiguiente, $\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$. Por lo tanto, la integral de línea es 0.

(b) De nuevo, usamos la definición de integral de línea. Además usamos la definición de producto punto y obtenemos

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F}\big(\boldsymbol{\sigma}(t)\big) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\, dt = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \|\mathbf{F}\big(\boldsymbol{\sigma}(t)\big)\|\, \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| \cdot \cos(0)\, dt = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \|\mathbf{F}\| ds.$$

Este resultado se justifica porque el coseno del ángulo entre vectores paralelos es 0 y por definición, $ds = \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt$.

7. Tenemos que $\boldsymbol{\sigma}(t) = (x, y, z) = (t, t^n, 0)$, $0 \le t \le 1$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Derivamos cada componente y obtenemos $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (1, nt^{n-1}, 0)$, $0 \le t \le 1$, entonces

$dx = dt$, $dy = nt^{n-1}$ y $dz = 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\sigma}} [y\,dx + (3y^3 - x)\,dy + z\,dz] &= \int_0^1 (t^n dt + (3t^{3n} - t)nt^{n-1}dt + 0)\\ &= \int_0^1 (t^n + 3nt^{4n-1} - nt^n)dt\\ &= \left(\frac{1-n}{1+n}t^{n+1} + \frac{3}{4}n^{4n}\right)\Big|_0^1 = \frac{1-n}{1+n} + \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

11. Dado que $\boldsymbol{\sigma}(t)$ es una trayectoria y $\mathbf{T}$ es una tangente unitaria, tenemos

$$\mathbf{T} = \frac{\boldsymbol{\sigma}'(t)}{\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|}$$

por definición. Como $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$, tenemos las integrales de línea

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \frac{\boldsymbol{\sigma}'(t)}{\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|} \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t)\,dt = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \frac{\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|^2}{\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|}dt = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\,dt.$$

La última integral es la longitud de arco de $\boldsymbol{\sigma}(t)$.

14. Si un campo vectorial es un gradiente, entonces la integral sólo debe depender de los puntos extremos. Para una curva cerrada, el punto de partida es el mismo que el punto final, por lo tanto, del teorema 3 se deduce que la integral es 0.

7.3 Superficies parametrizadas

OBJETIVOS

1. Poder parametrizar una superficie dada.

2. Poder determinar si una superficie es suave y/o diferenciable.

3. Poder calcular un plano tangente para superficies parametrizadas.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Superficies parametrizadas.* Recuerda que las curvas en el plano se pueden parametrizar mediante dos funciones de una variable, o sea, $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Ahora extendemos esta idea a superficies. Hacemos esto definiendo x, y y z como funciones de dos variables, es decir, ahora tenemos tres funciones de dos variables, $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ y $z = h(u, v)$.

2. *Superficies diferenciables.* Una superficie de este tipo está parametrizada por $\big(f(u, v), g(u, v), h(u, v)\big)$ donde f, g y h son funciones diferenciables.

3. *Repaso.* Recuerda que un vector $\mathbf{n}$ que es normal a un plano da los coeficientes de la ecuación del plano. Consulta la sección 1.3.

4. *Vectores tangentes.* De la misma manera que con derivadas parciales, podemos mantener u constante y obtener $\mathbf{T}_v = (f_v, g_v, h_v)$. De igual forma, mantenemos v constante y obtenemos $\mathbf{T}_u = (f_u, g_u, h_u)$.

5. *Plano tangente.* Si mantenemos constante cualquier parámetro, u o v, obtenemos una curva en la superficie, y si tal curva es "suave", tendrá una recta tangente. De manera similar, podemos obtener una recta tangente si mantenemos el otro parámetro constante. Estas dos rectas tangentes determinan un plano tangente, y el vector normal al plano es $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$.

6. *Suavidad.* Decimos que una superficie es suave si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$. Cuando el producto punto no es $\mathbf{0}$, existe un plano tangente y en cosecuencia la superficie no tiene regiones puntiagudas (como el cono). La diferenciabilidad no implica suavidad (véase el ejemplo 1), pero la suavidad requiere la diferenciabilidad, pues de otra forma, $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ no estarían definidos.

7. *Parametrizaciones importantes.* Debes conocer las parametrizaciones siguientes:
   (a) Círculo de radio r: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $0 \leq \theta 2\pi$.
   (b) La hipérbola $x^2 - y^2 = 1$: $x = r\cosh t$, $y = r\,\mathrm{senh}\,t$.
   (c) La esfera de radio ρ: $x = \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $z = \rho\cos\varphi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Son las mismas fórmulas de la definición de coordenadas esféricas.
   (d) Una superficie $z = g(x, y)$: $x = u$, $y = v$, $z = g(u, v)$.

8. *La normal a una gráfica.* Si $z = f(x, y)$, la normal a la gráfica es

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$$

Es útil saber esto para las siguientes secciones. Observa que si hacemos $g = z - f(x, y)$, entonces el vector ortogonal (sin normalizar) a la superficie es $\mathbf{n} = \nabla g$.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

3. El vector normal al plano tangente que queremos es $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$. Calculamos $\mathbf{T}_u = (\partial x/\partial u, \partial y/\partial u, \partial z/\partial u) = (2u, \mathrm{sen}\,e^v, (1/3)\cos e^v)$. De manera similar, $\mathbf{T}_v =$

$(0, e^v u \cos e^v, -(1/3)e^v u \operatorname{sen} e^v)$. Calculamos

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & \operatorname{sen} e^v & (1/3)\cos e^v \\ 0 & ue^v \cos e^v & (-u/3)e^v \operatorname{sen} e^v \end{vmatrix} \\ &= \left((-u/3)e^v \operatorname{sen}^2 e^v - (u/3)e^v \cos^2 e^v\right)\mathbf{i} + \left((2u^2/3)e^v \operatorname{sen} e^v\right)\mathbf{j} \\ &\quad + \left(2u^2 e^v \cos e^v\right)\mathbf{k} = (-u/3)e^v(-\mathbf{i} + 2u \operatorname{sen} e^v \mathbf{j} + 6u \cos e^v \mathbf{k}).\end{aligned}$$

Para encontrar el plano tangente sólo necesitamos evaluar $-\mathbf{i}+2u \operatorname{sen} e^v\mathbf{j}+6u \cos e^v\mathbf{k}$ en el punto dado (u_0, v_0). Sin embargo, sólo tenemos (x_0, y_0, z_0), de manera que debemos tener cuidado. Sabemos que $u \operatorname{sen} e^v = -2$ y $(u/3)\cos e^v = 1$ en el punto dado, por lo tanto $2u \operatorname{sen} e^v = -4$ y $6u \cos e^v = 18$. Entonces el plano tangente es

$$-(x - 13) - 4(y + 2) + 18(z - 1) = 0, \quad \text{o} \quad 18z - 4y - x = 13.$$

4. (1) Una superficie es suave si $\mathbf{T}_v \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$. Calculamos $\mathbf{T}_u = 2\mathbf{i} + 2u\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ y $\mathbf{T}_v = 0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2v\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2u & 0 \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = 4uv\mathbf{i} - 4v\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

el cual nunca es $\mathbf{0}$. Por lo tanto, la superficie es suave.

(2) Una vez más calculamos $\mathbf{T}_u = 2u\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2u\mathbf{k}$ y $\mathbf{T}_v = -2v\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 1 & 2u \\ -2v & 1 & 4 \end{vmatrix} = (4 - 2u)\mathbf{i} - (8u + 4uv)\mathbf{j} + (2u + 2v)\mathbf{k}.$$

Si $u = -v = 2$, entonces $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \mathbf{0}$. Así, la superficie *no* es suave en $(0, 0 - 4)$.

7. De las parciales de x, y y z con respecto a u, calculamos $\mathbf{T}_u = \mathbf{j}$ y, de manera similar, $\mathbf{T}_v = (\cos v)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} v)\mathbf{k}$. Entonces

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos v & 0 & -\operatorname{sen} v \end{vmatrix} = -(\operatorname{sen} v)\mathbf{i} - (\cos v)\mathbf{k}.$$

Por suerte, la magnitud de este vector ya es 1, por tanto, una normal unitaria es $\mathbf{n} = -(\operatorname{sen} v)\mathbf{i} - (\cos v)\mathbf{k}$. (Observa que otro vector normal unitario es $(\operatorname{sen} v)\mathbf{i} + (\cos v)\mathbf{k}$, dependiendo de qué producto tomes ($\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ o $\mathbf{T}_v \times \mathbf{T}_u$).)

9. (a) La superficie se describe en forma paramétrica como $x = h(y, z)$, $y = y$, $z = z$. En este caso, $\mathbf{T}_y = (h_y, 1, 0)$ y $\mathbf{T}_z = (h_z, 1, 0)$, entonces

$$\mathbf{T}_y \times \mathbf{T}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ h_y & 1 & 0 \\ h_z & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -h_y, -h_z).$$

$\mathbf{T}_y \times \mathbf{T}_z$ es normal al plano tangente, por tanto el plano tangente es $(x - x_0) - h_y(y - y_0) - h_z(z - z_0) = 0$, donde h_y y h_z se evalúan en (x_0, y_0, z_0).

10. (b) La superficie está parametrizada por $(x, y, 3x^2 + 8xy)$, entonces $\mathbf{T}_x = (1, 0, 6x)$ y $\mathbf{T}_z = (0, 1, 8x)$. En el punto $(1, 0, 3)$, $\mathbf{T}_x = (1, 0, 6)$ y $\mathbf{T}_z = (0, 1, 8)$. El vector normal está dado por

$$\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -2\mathbf{j}.$$

Por consiguiente, la ecuación es $-2y = 0$ o $y = 0$.

11. (a) Cuando $\theta = 0$, $\Phi(r, 0)$ es el segmento de recta que une a $(0, 0, 0)$ con $(1, 0, 0)$. Como θ aumenta su valor, el segmento de recta gira alrededor del eje z y se mueve hacia la altura $z = \theta$. Entonces obtenemos el dibujo de un helicoide. El dibujo de la figura 6.4.2 muestra un helicoide para θ que varía de 0 a 2π. El helicoide para $0 \leq \theta \leq 4\pi$ es similar excepto que la gráfica se extiende desde $z = 4\pi$ y hace una revolución adicional alrededor del eje z.

(b) Si derivamos las componentes de $\Phi(r, \theta)$ obtenemos $\mathbf{T}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$ y $\mathbf{T}_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 1)$. Un vector normal a Φ es

$$\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r).$$

Por lo tanto el vector normal es $(\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta)/\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r)/\sqrt{1+r^2}$.

(c) Multiplicamos el $\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta$ calculado en la parte (b) y obtenemos otro vector normal: $(r\operatorname{sen}\theta, -r\cos\theta, r^2) = (y, -x, x^2+y^2)$. Entonces la ecuación del plano tangente en (x_0, y_0, z_0) es $y_0(x - x_0) - x_0(y - y_0) + (x_0^2 + y_0^2)(z - z_0) = 0$.

15. (a) Es evidente que la imagen de Φ_1 es el plano xy (o el plano uv, si prefieres). Como u^3 y v^3 pueden tomar cualquier valor real, y la tercer coordenada es 0, la imagen de Φ_2 también es el plano xy.

(b) Una superficie no es suave si $\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = 0$. Para Φ_1, tenemos $\mathbf{T}_u = \mathbf{i}$ y $\mathbf{T}_v = \mathbf{j}$, entonces $\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \|\mathbf{k}\| = 1$. Por lo tanto, Φ_1 describe una superficie suave. Para Φ_2, tenemos $\mathbf{T}_u = 3u^2\mathbf{i}$ y $\mathbf{T}_v = 3v^2\mathbf{j}$. Si $u = 0$ y $v = 0$, entonces $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = 0$. Por lo tanto, Φ_2 no es suave. (Este problema ilustra que la "suavidad" depende de la parametrización, no necesariamente de la imagen.)

(d) La respuesta es no. Una parametrización "suave" no puede "dar la vuelta" en las "esquinas" de una gráfica. (De lo contrario no sería una parametrización "válida" de un mapeo porque su gráfica podría representar esto de otro mapeo.)

7.4 Área de una superficie

OBJETIVOS

1. Poder encontrar el área de una superficie dada.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Argumentos con sumas de Riemann.* Si entiendes los argumentos con sumas de Riemann, debes poder deducir la fórmula para el área de una superficie.

2. *Fórmulas.* Debes conocer al menos una fórmula para el área de una superficie. Una es
$$A(S) = \int_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, du \, dv.$$
La ecuación (3) es una consecuencia inmediata de esta fórmula y la (4) es un caso especial de la (3). Si eliges recordar la ecuación (3), observa que el integrando contiene la matriz jacobiana de cada posible par que se pueda formar de (x, y, z), es decir, (x, y), (y, z) y (x, z).

3. *Uno a uno.* La parametrización elegida debe ser uno a uno, pues de otra manera la superficie se puede cubrir más de una vez, tal como ocurre en el caso de las curvas. Consulta el ejercicio 2.

4. *área de superficie de una gráfica.* Si $z = f(x, y)$, usamos la parametrización $x = u$, $y = v$ y $z = f(u, v)$. Entonces la fórmula para el área de superficie es
$$A(S) = \int_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA.$$
Es importante conocer esta fórmula o si no, se debe deducir de $\int_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, du \, dv$.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

2. Usamos la fórmula (3) para calcular los siguientes determinantes:
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial\theta & \partial x/\partial\varphi \\ \partial y/\partial\theta & \partial y/\partial\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta \operatorname{sen}\varphi & \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi.$$
$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} -\cos\theta \operatorname{sen}\varphi & \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta,$$
y
$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta.$$

Elevamos al cuadrado los determinantes anteriores, los sumamos, aplicamos raíz cuadrada y obtenemos

$$\begin{aligned}\|\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\varphi\| &= \sqrt{\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^4\varphi(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)} \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^2\varphi(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi)} = \|\operatorname{sen}\varphi\|.\end{aligned}$$

Si hacemos que φ varíe de $-\pi/2$ hasta $\pi/2$, entonces obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen}\varphi| d\phi\, d\theta &= 2\pi\left[\int_{-\pi/2}^{0}(-\operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi + \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\right] \\ &= 2\pi\left[\cos\varphi\Big|_{-\pi/2}^{0} + (-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2}\right] = 4\pi.\end{aligned}$$

La respuesta es 4π porque cambiamos la manera de medir φ variando esta φ de $-\pi/2$ hasta $\pi/2$. Esta parametrización cubre el hemisferio superior dos veces, por lo tanto, el área de la superficie es igual al de una esfera completa. Si hacemos variar φ de 0 a 2π, debemos obtener 8π, porque la esfera se parametriza dos veces:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} |\operatorname{sen}\varphi| d\varphi\, d\theta &= 2\pi\left[\int_{\pi}^{0}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi}(-\operatorname{sen}\varphi)\, d\varphi\right] \\ &= 2\pi\left[(-\cos\varphi)\Big|_{\pi}^{0} + \cos\varphi\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = 2\pi(2+2) = 8\pi.\end{aligned}$$

Si hubiéramos integrado simplemente $\operatorname{sen}\varphi$, habríamos calculado el área de una superficie de 0 en ambos casos, pero esto no es posible. El área de una superficie debe ser positiva.

5. El área de $\Phi(D)$ es $\int_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv$. Dada $\Phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$, tenemos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2; \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(v,u)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{vmatrix} = u - v; \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ v & u \end{vmatrix} = u + v.$$

Elevamos al cuadrado los determinantes anteriores, los sumamos, aplicamos raíz cuadrada y obtenemos el integrando

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{2^2 + (u-v)^2 + (u+v)^2} = \sqrt{4 + 2u^2 + 2v^2} = \sqrt{2}\sqrt{u^2 + v^2 + 2}.$$

Como estamos integrando sobre el disco unitario, usamos coordenadas polares. Sea $u = r\cos\theta$ y $v = r\operatorname{sen}\theta$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_D \sqrt{2}\sqrt{u^2+v^2+2}\, dA &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sqrt{r^2+2}\, r\, d\theta\, dr = 2\sqrt{2}\pi\int_0^1\sqrt{r^2+2}\, r\, dr \\ &= 2\sqrt{2}\pi\cdot\frac{1}{3}(r^2+2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3^{3/2} - 2^{3/2}) \\ &= \frac{\pi}{3}(6\sqrt{6} - 8).\end{aligned}$$

8. Elegimos la parametrización $x = \sqrt{t^2+1}, y = t, z = z, 0 \leq z \leq 1, -1 \leq t \leq 1$. Para obtener el integrando de la fórmula del área de una superficie, primero calculamos

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,z)}\right| = 0, \qquad \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,z)}\right| = 1, \qquad \left|\frac{\partial(x,z)}{\partial(t,z)}\right| = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}},$$

entonces,

$$\|\mathbf{T}_t \times \mathbf{T}_z\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + \frac{t^2}{t^2+1}}dt\,dz = \sqrt{\frac{2t^2+1}{t^2+1}}dt\,dz.$$

Por lo tanto, el área de la superficie es

$$\int_0^1\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{2t^2+1}{t^2+1}}dt\,dz = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{2t^2+1}{t^2+1}}dt.$$

Esta integral no se puede calcular de forma analítica. Una parametrización alternativa se obtiene si usamos las funciones hiperbólicas senh t y cosh t; la integral sólo se vuelve más difícil.

10. Sea $x = u\cos v$, $y = f(u)$, $z = u \operatorname{sen} v$, $a \leq u \leq b$, $0 \leq v \leq 2\pi$. El lector debe verificar que

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = -vf'(u)\operatorname{sen} v, \qquad \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right| = uf'(u)\cos v, \quad \text{y} \quad \left|\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right| = u.$$

Entonces, el área de la superficie es

$$A(S) = \int_D \sqrt{u^2 + u^2\left(f'(u)\right)^2}du\,dv.$$

Como el integrando no depende de v, la integral respecto a v se puede efectuar y obtenemos la fórmula deseada

$$A(S) = 2\pi\int_a^b |u|\sqrt{1 + \left(f'(u)\right)^2}du.$$

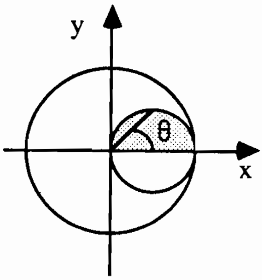
13. Estamos interesados en el área de la superficie $z(x,y) = f(x,y) = 1 - x - y$, en el interior de $x^2 + 2y^2 \leq 1$. Primero calculamos

$$\sqrt{1 + t_x^2 + t_y^2}dx\,dy = \sqrt{3}dx\,dy.$$

Para calcular el área de la superficie necesitamos parametrizar el disco $z = 0$, $x^2+2y^2 \leq 1$ usando coordenadas polares: $x = r\cos\theta, y = (r/\sqrt{2})\operatorname{sen}\theta, 0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y el jacobiano es $r/\sqrt{2}$. Nuestra integral se transforma entonces en:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}}r \cdot \sqrt{3}dr\,d\theta = \frac{\pi\sqrt{6}}{2}.$$

17.



Si completamos cuadrados, la ecuación $x^2 + y^2 = x$ se transforma en $(x^2 - x + 1/4) + y^2 = 1/4$, que es lo mismo que $(x - 1/2)^2 + y^2 = (1/2)^2$. Esta ecuación representa el cilindro cuya base es el círculo con centro en $(1/2, 0)$ con radio $1/2$, como se muestra en la figura. Para encontrar el área de la superficie de S_1 necesitamos considerar la parte donde el cilindro se "sale" de la esfera. Consideremos el octante positivo. El área de la superficie es

$$\int_D \sqrt{1 + t_x^2 + t_y^2}\,dx\,dy,$$

donde D es la mitad de la base del círculo (la región sombreada), y $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ es la esfera. Como integraremos sobre una región circular, podemos usar coordenadas polares: $x^2+y^2 = x$ equivale a $r^2 = r\cos\theta$ o $r = \cos\theta$. De la figura vemos que D se puede describir como $0 \le r \le \cos\theta$ y $0 \le \theta \le \pi/2$. También calculamos $f_x = -x/\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y, por simetría $f_y = -y/\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Por lo tanto, $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = 1/\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, que se transforma en $1/\sqrt{1 - r^2}$ en coordenadas polares. Recordando que el jacobiano es r y que S_1 consta de cuatro superficies iguales, obtenemos

$$\begin{aligned}A(S_1) &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}dr\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\left(-\sqrt{1 - r^2}\Big|_{r=0}^{\cos\theta}\right)d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2}(1 - \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = 4(\theta + \cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} = 2\pi - 4.\end{aligned}$$

De la geometría elemental sabemos que $A(S_2) = 4\pi - (2\pi - 4) = 2\pi + 4$, por tanto $A(S_2)/A(S_1) = (2\pi + 4)/(2\pi - 4)$.

20. Primero calcularemos el volumen del material que se elimina para hacer el hoyo en la esfera. Usaremos coordenadas cilíndricas para describir el hoyo: $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $-\sqrt{4 - r^2} \le z \le \sqrt{4 - r^2}$. Los límites de z se obtienen partir de las ecuaciones para los hemisferios superior e inferior: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ y $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ y sustituimos $r^2 = x^2 + y^2$. Recordando que el jacobiano es r, obtenemos

$$\begin{aligned}V_{\text{hoyo}} &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dr\,dz\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\sqrt{4 - r^2}dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{-2(4 - r^2)^{3/2}}{3}\Big|_{r=0}^{1}\right)d\theta = \frac{2}{3}(8 - 3\sqrt{3})\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Como el volumen de la esfera es $32\pi/3$, el volumen del acoplador es $32\pi/3 - (3\pi/3 - 4\pi\sqrt{3}) = 4\pi\sqrt{3}$.

Para el área de la superficie basta con calcular el área de la superficie de una "tapa" del hoyo. En coordenadas rectangulares, el área de la superficie $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ sobre D, el círculo de radio 1, es $\int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2 dx\, dy}$. Calculamos $f_x = -x/\sqrt{4 + x^2 - y^2}$ y $f_y = -y/\sqrt{4 - x^2 - y^2}$, por lo tanto, $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = 4/\sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Si cambiamos a coordenadas polares, el área de una tapa es

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{4r}{\sqrt{4 + r^2}} dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-4\sqrt{4 - r^2} \Big|_{r=0}^{1} \right] d\theta$$
$$= (8 - 4\sqrt{3}) \int_0^{2\pi} d\theta = \pi(16 - 8\sqrt{3}).$$

Como el área de la superficie de la esfera es $4\pi r^2$, o 16π, y el área de la superficie de las dos tapas es $2\pi(16 - 8\sqrt{3})$, el área de la superfice exterior del acoplador es $16\pi(\sqrt{3} - 1)$.

22. (b) Calculamos $f_x = y + 1/(y + 1)$ y $f_y = x - x/(y + 1)^2$. Entonces

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA = \sqrt{1 + \frac{(y^2 + y + 1)^2}{(y + 1)^2} + \frac{\left(x(y + 1)^2 - x\right)^2}{(y + 1)^4}} dA$$
$$= \frac{1}{(y + 1)^2} \sqrt{(y + 1)^4 + (y^3 + 2y^2 + 2y + 1)^2 + \left(x(y + 1)^2 - x\right)^2} dA,$$

y el área de la superficie es

$$\int_1^4 \int_1^2 \frac{1}{(y + 1)^2} \sqrt{(y + 1)^4 + (y^3 + 2y^2 + 2y + 1)^2 + \left(x(y + 1)^2 - x\right)^2} dy\, dx.$$

7.5 Integrales de funciones escalares sobre superficies

OBJETIVOS

1. Poder calcular la integral de una función escalar dada sobre una superficie.
2. Entender por qué la integral se define de esta manera e interpretarla físicamente.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Notación.* En esta sección introduciremos dS, que significa $\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv$, la cual se estudió en la sección anterior.

2. *Importancia.* El material de esta sección y la siguiente se usará de manera intensiva en el capítulo 8. En esta sección integramos funciones escalares, como lo hicimos en la sección 7.1, y en la siguiente sección integraremos funciones vectoriales.

3. *Cómo calcular.* La fórmula para la integral de superficie de una función escalar f es

$$\int_S f\, dS = \int_D f \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv.$$

En este caso, por lo general f se da como una función de (x, y, z) y se reescribe en términos de las variables u y v al sustituir x, y y z como funciones de u y v.

4. *Interpretación física.* (a) Si $f = 1$, entonces tenemos el área de superficie. Es posible que esto ayude a recordar la fórmula.
(b) Si f es la densidad de masa por unidad de área de cada punto de esta superficie, obtenemos la masa de la superficie.

5. *Integración escalar sobre una gráfica.* Si $z = g(x, y)$, entonces la fórmula se transforma en:

$$\int_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Deberías recordar esto o poderlo deducir de $\int_D f \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv$.

6. *Integración sobre un plano.* Si S es un plano, podemos simplificar la fórmula de integración de la ecuación (5):

$$\int_S f\, dS = \int_D \frac{f}{\cos\theta} dx\, dy, \qquad \text{donde} \qquad \cos\theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$$

y $\mathbf{n}$ es el vector *unitario* normal al plano. (Repasa la geometría del producto punto, sección 1.2.) “Proyectamos” S sobre el plano xy para simplificar los cálculos.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

3. Como estamos integrando sobre un hemisferio, es buena idea usar coordenadas esféricas. Para la superficie hemisférica tenemos $\rho = a$, de manera que $x = a\cos\theta \operatorname{sen}\varphi$, $y = a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$ y $z = a\cos\varphi$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Entonces

$$\begin{aligned}\|\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\varphi\| &= \|(-a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi\mathbf{i} + a\cos\theta \operatorname{sen}\varphi\mathbf{j} - 0\mathbf{k})\times \\ &\qquad (a\cos\theta\cos\varphi\mathbf{i} + a\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\mathbf{j} - a\operatorname{sen}\varphi\mathbf{k})\| \\ &= a^2 \operatorname{sen}\varphi.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_S z\,dS &= \int\int_D a\cos\varphi\|\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\varphi\|\,d\varphi\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} a\cos\varphi \cdot a^2 \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\,d\theta \\ &= 2\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,d\varphi = 2\pi a^3 \left(\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \pi a^3.\end{aligned}$$

7. Parametrizamos S usando coordenadas polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como la superficie se describe mediante $z = x^2 + y^2$, sustituimos en x y y y obtenemos $z = r^2$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta &= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2r) \times (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0) \\ &= (-2r^2\cos\theta, -2r^2\operatorname{sen}\theta, r),\end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}dS &= \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\|\,dr\,d\theta \\ &= \sqrt{4r^4 + r^2}\,dr\,d\theta = r\sqrt{4r^2+1}\,dr\,d\theta.\end{aligned}$$

Calculamos la integral de superficie

$$\begin{aligned}\int_S z\,dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \cdot r\sqrt{4r^2+1}\,dr\,d\theta \\ &= 2\pi\int_0^1 r^2 \cdot r\sqrt{4r^2+1}\,dr.\end{aligned}$$

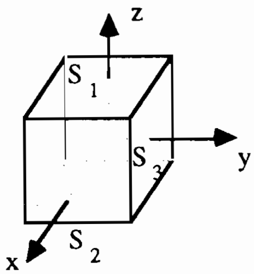
Esta integral se puede efectuar usando integración por partes (o las tablas): sea

$$\begin{aligned}u &= r^2, & dv &= r\sqrt{4r^2+1}\,dr; \\ du &= 2r\,dr, & v &= \frac{1}{12}(4r^2+1)^{3/2}.\end{aligned}$$

Entonces la integral se transforma en

$$2\pi\left[\frac{r^2}{12}(4r^2+1)^{3/2}\Big|_0^1-\frac{1}{6}\int_0^1 r(4r^2+1)^{3/2}dr\right]$$

$$=2\pi\left[\frac{5\sqrt{5}}{12}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{5}(4r^2+1)^{5/2}\Big|_0^1\right]=\frac{5\sqrt{5}\pi}{12}-\frac{\pi}{60}.$$

8. 

Primero integramos sobre la porción del cubo que está en el plano $z = 1$, al cual llamaremos S_1. Tenemos $-1 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$, de donde $\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ y $\|\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y\| = 1$. Entonces

$$\int_{S_1} z^2 dS_1 = \iint_D z^2\|\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y\|\,dx\,dy$$

$$=\int_{-1}^1\int_{-1}^1 1\cdot 1\cdot dx\,dy = 4.$$

La integral sobre la porción del plano $z = -1$, a la cual llamaremos S_2, se hace exactamente de la misma manera, así,

$$\int_{S_2} z^2 dS_2 = 4.$$

Ahora, para S_3, que está en el plano $x = 1$. Tenemos que D es el cuadrado $-1 \leq y \leq 1$ y $-1 \leq z \leq 1$, de manera que $\mathbf{T}_y \times \mathbf{T}_z = \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ y $\|\mathbf{T}_y \times \mathbf{T}_z\| = 1$. Entonces

$$\int_{S_3} z^2 dS_3 = \iint_D z^2\|\mathbf{T}_y \times \mathbf{T}_z\|\,dy\,dz = \int_{-1}^1\int_{-1}^1 z^2 dy\,dz = 2\left(\frac{z^3}{3}\Big|_{-1}^1\right) = \frac{4}{3}.$$

De manera similar,

$$\int_{S_4} z^2 dS_4 = \int_{S_5} z^2 dS_5 = \int_{S_6} z^2 dS_6 = \frac{4}{3},$$

donde S_4 es el plano $x = -1$, S_5 es el plano $y = 1$ y S_6 es el plano $y = -1$. Por lo tanto, $\int_S z^2 dS$ es la suma de las integrales sobre las seis superficies, la cual es $4 + 4 + 4/3 + 4/3 + 4/3 + 4/3 = 40/3$.

11. (a) La ecuación de la esfera es $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Podemos sustituir x por y, y por z y z por x, o cualquier otra permutación, y aún tener la misma ecuación. De manera que las tres integrales deben ser iguales. (En general, esto es lo que

significa “por simetría”.) Geométricamente, una esfera “se ve igual” sin que importe desde dónde la miras.

(b) Si usamos la parte (a), tenemos

$$\int_S (x^2+y^2+z^2)\,dS = \int_S x^2 dS + \int_S y^2 dS + \int_S z^2 dS = 3\int_S x^2 dS.$$

Sustituimos $x^2+y^2+z^2 = R^2$ y si recordamos que $\int_S dS$ es el área de la superficie S para obtener

$$\int_S x^2 dS = \frac{1}{3}\int_S (x^2+y^2+z^2)\,dS = \frac{1}{3}\int_S R^2 dS = \frac{R^2}{3}\cdot 4\pi R^2 = \frac{4\pi}{3}R^4.$$

(c) Debido a la simetría de la esfera, si integráramos x^2+y^2 sobre la esfera completa, obtendríamos el doble de la masa que se pide en el ejercicio 10. Por lo tanto, el resultado deseado es

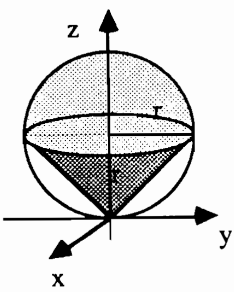
$$\frac{1}{2}\int_S (x^2+y^2)\,dS = \frac{1}{2}(2)\int_S x^2 dS = \frac{4\pi}{3}R^4.$$

14. Por el ejercicio 12, el promedio de la coordenada z es

$$\frac{1}{A(S)}\int_S z\,dS.$$

En este caso, $A(S)$, el área de la superficie de un hemisferio de radio R, es $2\pi R^2$. Por el ejercicio 3, $\int_S z\,dS$ es πR^3, por lo tanto, $\bar{z} = \pi R^3/2\pi R^2 = R/2$. Como la parte de la esfera que está de un lado del eje z es igual a la que está del otro lado (por simetría), $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

17. (a)



La ecuación de la esfera es $x^2+y^2+z^2 = 2rz$, $r > 0$. Si completamos cuadrados, vemos que la ecuación anterior equivale a $x^2+y^2+(z-r)^2 = r^2$, que es la esfera de radio r con centro en $(0, 0, r)$. La punta del cono $z^2 = x^2+y^2$ interseca a la esfera (por diseño) en el origen. Para encontrar la otra intersección, observa que $x^2+y^2+(z-r)^2 = r^2$ y $z^2 = x^2+y^2$ implican $r^2-(z-r)^2 = z^2$ o $z = r$. Parametrizamos el cono de la manera siguiente: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = \rho$ donde $0 \le \rho \le r$ y $0 \le \theta \le 2\pi$. Deberías verificar que $\|\mathbf{T}_\rho \times \mathbf{T}_\theta\| = \sqrt{2}\rho$. Entonces el área del cono que está dentro de la esfera es

$$\int_0^{2\pi}\int_0^r \sqrt{2}\rho\,d\rho\,d\theta = 2\pi\sqrt{2}\frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^r = \pi\sqrt{2}r^2.$$

(b) Pensamos que cuando los autores dicen “el área de la porción de la esfera que está dentro del cono” se refieren al área de la porción de la esfera que es la parte del “helado” en esta configuración. En realidad, este problema es trivial; es simplemente el área del hemisferio de radio r, o $2\pi r^2$.

7.6 Integrales de superficie de funciones vectoriales

OBJETIVOS

1. Poder calcular la integral de superficie de una función vectorial.

2. Entender sus consecuencias y su interpretación física.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Notación.* El símbolo $\mathbf{n}(\Phi(u_0, v_0))$ se usa para describir el vector unitario que es normal a Φ (una superficie parametrizada) en (u_0, v_0); observa que $\Phi(u_0, v_0)$ es el punto base de $\mathbf{n}$.

2. *Orientación.* Como en las integrales de línea, la orientación es importante. El signo de la integral cambia con la orientación opuesta.

3. *Parametrización.* De la misma manera que con las integrales de línea, podemos reparametrizar superficies. Si se conserva la orientación, el valor de la integral no cambia.

4. *Definición.* La integral de superficie de un campo vectorial $\mathbf{F}$ sobre una superficie Φ es
$$\int_{\Phi} \mathbf{F} \cdot dS = \int_{D} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\, du\, dv.$$
La integral de un campo vectorial es un escalar.

5. *Generalizaciones.* Observa que las integrales de campos escalares (Secs. 7.1 y 7.5) no dependen de la orientación. El signo cambia en la integración de un campo vectorial (Secs. 7.2 y 7.6) si la orientación se ha invertido. Por último, observa que en la integral de un campo escalar aparece la longitud de un vector y en la integral de un campo vectorial aparece un producto punto.

6. *Reducción a integrales de campos escalares.* Si conocemos el vector unitario ortogonal a la superficie Φ, entonces la integral de superficie se reduce a $\int_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS$. Si hacemos $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, obtenemos la integral de campo escalar de la sección 7.5. Si la orientación cambia, $\mathbf{n}$ cambia de signo y también f.

7. *La integral de superficie sobre una gráfica.* Si $z = f(x, y)$ y $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, sabemos que $\mathbf{n} = (-\partial f/\partial x, -\partial f/\partial y, 1)$, de manera que la integral de superficie se transforma en
$$\int_G \left[F_1\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) + F_2\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right) + F_3\right] dx\, dy.$$

8. *Interpretación física.* La integral de superficie sobre Φ nos da la razón de flujo de un fluido cuando atraviesa una superficie Φ. Esto se conoce como flujo.

9. *Normal unitaria a una esfera unitaria.* Es útil saber que en el caso de la *esfera unitaria* $\mathbf{n} = \mathbf{r} = (x, y, z)$.

10. *Buen ejemplo.* El ejemplo 6 nos muestra tres maneras de calcular la misma integral.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. Como en el ejemplo 4, el flujo del calor a través de la superficie S es $\int_S -\nabla T \cdot d\mathbf{S}$. Parametrizamos la superficie $x^2 + z^2 = 2$. Sea $x = \sqrt{2}\cos\theta$, $z = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Por lo tanto, la superficie se puede parametrizar mediante $S(\theta, y) = (\sqrt{2}\cos\theta, y, \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq y \leq 2$. Entonces el vector normal a S que apunta hacia afuera es $\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_y = \sqrt{2}\cos\theta\mathbf{i} + \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta\mathbf{k}$. Dado que $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$, calculamos $-\nabla T = -6(x, 0, z) = -6(\sqrt{2}\cos\theta, 0, \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta)$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_S -\nabla T \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D -\nabla T \cdot (\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_y)\, dy\, d\theta \\ &= -6\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[\left(\sqrt{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta\right)^2\right] dy\, d\theta \\ &= -12\int_0^{2\pi}\int_0^2 dy\, d\theta = -48\pi.\end{aligned}$$

Si usamos los otros productos cruz (y por tanto en la orientación opuesta), la respuesta sería $+48\pi$.

6. Primero calculamos

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 + y - 4 & 3xy & 2xz + z^2 \end{vmatrix} = -2z\mathbf{j} + (3y - 1)\mathbf{k}.$$

Usamos coordenadas esféricas para parametrizar S: $x = 4\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$, $y = 4\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$, $z = 4\cos\varphi$ con $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Entonces $\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\varphi = 16(-\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta\mathbf{i} - \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta\mathbf{j} - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\mathbf{k})$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} &= \int_S (0, -2z, 3y - 1) \cdot (\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\varphi) d\theta\, d\varphi \\ &= -16\int_S \big[(0, -8\cos\varphi, 12\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi - 1) \\ &\qquad (\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta, \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)\big] d\theta\, d\varphi\end{aligned}$$

$$= -16 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (4 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi)\, d\varphi\, d\theta$$

$$= -16 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{4}{3} \operatorname{sen}^3 \varphi \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} \right] d\theta$$

$$= -16 \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{3} \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2} \right) d\theta$$

$$= -16 \left[\frac{-4}{3} \cos \theta - \frac{\theta}{2} \right] \Big|_0^{2\pi} = 16\pi.$$

8. (a) La pared está sobre el círculo $z = 4R^2$, $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ y en lo alto de la montaña $x^2 + y^2 + z = 4R^2$. Desde la tapa superior, podemos parametrizar el círculo mediante

$$x = R \cos \theta, \quad y - R = R \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Entonces sobre la montaña tenemos

$$z = 4R^2 - (x^2 + y^2) = 4R^2 - \left[(R \cos \theta)^2 + (R + R \operatorname{sen} \theta)^2 \right]$$
$$= 4R^2 - [2R^2 + 2R \operatorname{sen} \theta] = 2R^2 - 2R \operatorname{sen} \theta.$$

Para encontrar el área de la superficie de la pared "cilíndrica" del restaurante, parametrizamos la pared mediante

$$x = R \cos \theta,\ y = R + R \operatorname{sen} \theta,\ z = z,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 2R^2 - 2R \operatorname{sen} \theta \leq z \leq 4R^2,$$

y el área de la superficie se transforma en

$$\int_0^{2\pi} \int_{2R^2 - 2R \operatorname{sen} \theta}^{4R^2} \|\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_z\|\, dz\, d\theta.$$

El lector debe verificar que $\|\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_z\| = R$, de manera que la integral se transforma en

$$\int_0^{2\pi} \int_{2R^2 - 2R \operatorname{sen} \theta}^{4R^2} R\, dz\, d\theta = \int_0^{2\pi} R(4R^2 - 2R^2 + 2R \operatorname{sen} \theta)\, d\theta = 4\pi R^3.$$

(b) Parametrizamos el restaurante mediante

$$x = r \cos \theta, \quad y = r + r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z.$$

donde $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $4R^2 - (2r^2 + 2r \operatorname{sen} \theta) \leq z \leq 4R^2$. El jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \\ 1 + \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r + r \operatorname{sen} \theta.$$

Por lo tanto, el volumen del restaurante se transforma en

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_{4R^2-(2r^2+2r\,\text{sen}\,\theta)}^{4R^2}(r+r\,\text{sen}\,\theta)\,dz\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^R(r+r\,\text{sen}\,\theta)(4R^2-4R^2+2r^2+2r\,\text{sen}\,\theta)\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^R(2r^3+2r^2\,\text{sen}\,\theta+2r^3\,\text{sen}\,\theta+2r^2\,\text{sen}^2\,\theta)\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{R^4}{2}+\frac{2}{3}R^3\,\text{sen}\,\theta+r^3\,\text{sen}\,\theta+\frac{R^4}{2}\,\text{sen}\,\theta+\frac{2R^3}{3}\,\text{sen}^2\,\theta\right)d\theta.$$

Como $\int_0^{2\pi}\text{sen}\,\theta\,d\theta=0$ y $\int_0^{2\pi}\text{sen}^2\,\theta\,d\theta=\pi$, el volumen es

$$\pi R^4+\frac{2\pi}{3}R^3.$$

Para determinar si el volumen es mayor que $\pi R^4/2$, resolvemos la desigualdad $V\geq\pi R^4/2$. Si tenemos presente que $R>0$, vemos que el restaurante dará beneficios para toda $R>0$.

(c) El flujo del calor es $\int_S V\cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{V}=-k(6x,2y-2R,32z)$. El techo del restaurante se pude parametrizar mediante $x=r\cos\theta$, $y=r\,\text{sen}\,\theta+R$, $z=4R^2$ para $0\leq r\leq R$ y $0\leq\theta\leq 2\pi$. Tenemos $\mathbf{T}_r=(\cos\theta)\mathbf{i}+(\text{sen}\,\theta)\mathbf{j}$ y $\mathbf{T}_\theta=(-r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{i}+(r\cos\theta)\mathbf{j}$, de modo que $\mathbf{T}_r\times\mathbf{T}_\theta=r\mathbf{k}$. Por lo tanto, el calor que fluye a través del techo es

$$\int_S\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S}=-k\int_S(6x,2y-2R,32z)\cdot(0,0,r)\,dr\,d\theta$$
$$=-k\int_0^{2\pi}\int_0^R 32zr\,dr\,d\theta=-k\int_0^{2\pi}\int_0^R 64Rr\,dr\,d\theta$$
$$=-k\int_0^{2\pi}\left(32Rr^2\Big|_{r=0}^{R}\right)d\theta=-k(32R^3)(2\pi)=-64\pi R^3k.$$

El lado que toca a la montaña se puede parametrizar mediante $x=r\cos\theta$, $y=r\,\text{sen}\,\theta+R$, $z=4R^2-(2r^2+2r\,\text{sen}\,\theta)$ para $0\leq r\leq R$ y $0\leq\theta\leq 2\pi$. Tenemos $\mathbf{T}_r=(\cos\theta)\mathbf{i}+(\text{sen}\,\theta)\mathbf{j}+(-2\cos\theta)\mathbf{k}$ y $\mathbf{T}_\theta=(-r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{i}+(r\cos\theta)\mathbf{j}+(-2r\cos\theta)\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{T}_r\times\mathbf{T}_\theta=(-4r^2\cos\theta)\mathbf{i}+(2r+4r^2\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j}+r\mathbf{k}$. Por consiguiente, el calor que fluye desde el lado de la montaña es

$$\int_S\mathbf{V}\cdot d\mathbf{S}=-k\int_S(6x,2y-2R,32z)\cdot(-4r^2\cos\theta,2r+4r^2\,\text{sen}\,\theta,r)\,dr\,d\theta$$

$$= -k \int_0^R \int_0^{2\pi} (-24r^3 \cos^2\theta + 4r^2 \operatorname{sen}\theta + 8r^3 \operatorname{sen}^2\theta$$
$$+ 128R^2 r - 64r^3 - 64r^2 \operatorname{sen}\theta)\, d\theta\, dr$$
$$= -k \int_0^R (-24r^3\pi + 8r^3\pi + 256R^2 r\pi - 128r^3\pi)\, dr = -92R^4\pi k$$

La pared curva de cristal se puede parametrizar como en la parte (a). Tenemos $\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_z = (R\cos\theta)\mathbf{i} + (R\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$. Por lo tanto, el calor que fluye a través de la pared es

$$\int_S \mathbf{V}\cdot d\mathbf{S} = -k \int_S (6x, 2y - 2R, 32z)\cdot(R\cos\theta, R\operatorname{sen}\theta, 0)\, dz\, d\theta$$
$$= -k \int_0^{2\pi} \int_{2R^2-2R\operatorname{sen}\theta}^{4R^2} (6R^2\cos^2\theta + 2R^2\operatorname{sen}^2\theta)\, dz\, d\theta$$
$$= -k \int_0^{2\pi} (4R^2 + 2R^2\cos^2\theta)(2R^2 - 2R\operatorname{sen}\theta)\, d\theta$$
$$= -20k\pi R^4.$$

Si sumamos estos resultados, encontramos que el flujo total es $-112k\pi R^4$.

11. La superficie S es la esfera unitaria, de manera que puede parametrizarse por medio de $x = \cos\theta\operatorname{sen}\varphi$, $y = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$ y $z = \cos\varphi$ para $0 \le \theta \le 2\pi$ y $0 \le \varphi \le \pi$. Si derivamos cada componente con respecto a θ obtenemos $\mathbf{T}_\theta = (-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta\operatorname{sen}\varphi, 0)$. De manera similar, $\mathbf{T}_\varphi = (\cos\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, -\operatorname{sen}\varphi)$. El vector normal a S es $\mathbf{T}_\varphi \times \mathbf{T}_\theta = (\operatorname{sen}^2\varphi\cos\theta, \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)$. Sacamos el factor común $\operatorname{sen}\varphi$ y obtenemos $(\operatorname{sen}\varphi)(x, y, z) = \mathbf{n} = (\operatorname{sen}\varphi)\mathbf{r}$. Supongamos que $\mathbf{F} = (F_r, F_\theta, F_\varphi)$, entonces $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{F}\cdot(\operatorname{sen}\varphi\mathbf{r}) = F_r \operatorname{sen}\varphi$. En este caso, usamos el hecho de que $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ forman una base ortonormal (véase la Sec. 1.4). Por tanto

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_r \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta.$$

La fórmula correspondiente para funciones de variable real es

$$\int_S f\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta.$$

15. Una parametrización de la superficie es $\Phi(u, v) = (u, v, 0)$, entonces $\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \|\mathbf{i}\times\mathbf{j}\| = \|\mathbf{k}\| = 1$. La integral escalar es

$$\int_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(u, v, 0)\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv.$$

Si sustituimos (x, y) por (u, v), obtenemos $\int\int_D f(x, y, 0)\, dx\, dy$. Para un campo vectorial $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ (Nota: ¡en este caso los subíndices *no* denotan parciales!),

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dx\, dy = \int\int_D F_z dx\, dy.$$

Es decir, sólo la componente z es importante.

16. (a) Parametrizamos el cono de la manera siguiente: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = (x^2 + y^2)^{1/2} = r$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Entonces $\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_r = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0) \times (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 1) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, -r)$. El flujo es la integral de superficie de $\mathbf{F}$ sobre S, que es

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (0, 0, 1) \cdot (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, -r)\, dr\, \theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\, dr\, \theta = \pi.$$

Para los más diestros, observa que la misma cantidad de lluvia que pasa por el cono, debe pasar por el disco $x^2 + y^2 \le 1$, $z = 0$. El problema se puede hacer mentalmente.

(b) Usamos la parametrización de la parte (a), el flujo total que pasa por el cono es

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, -r)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{2}(-r\cos\theta + r)\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}.$$

7.R Ejercicios de repaso del capítulo 7

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (b) Primero calculamos $\boldsymbol{\sigma}'(t) = (-\,\mathrm{sen}\,t, \cos t, 1)$, por lo que $\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\| = \sqrt{2}$. Entonces la integral de trayectoria es

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\, ds = \int_0^{2\pi} xyz\|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}(\cos t)(\mathrm{sen}\, t)t\, dt.$$

Usamos integración por partes con $u = t$, $dv = \cos t\,\mathrm{sen}\,t\, dt$, y $v = (1/2)\,\mathrm{sen}^2 t$. La integral se transforma en

$$\sqrt{2}\left(\frac{t}{2}\,\mathrm{sen}^2 t\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2 t\, dt\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{-\pi\sqrt{2}}{2}.$$

2. (b) Como en el ejercicio 1(b), tenemos $ds = \|\boldsymbol{\sigma}'(t)\|\,dt = \sqrt{2}dt$. Entonces, la integral de trayectoria es

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} f\,ds = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t + \cos^2 t)\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\operatorname{sen} t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$
$$= \sqrt{2}\left(-\cos t + \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi.$$

3. (b) Calculamos la integral de línea sobre cada segmento de C y las sumamos. Debemos tener cuidado con la orientación. Recuerda que del capítulo 1 que la ecuación $\mathbf{l}(t) = (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(-1, 1, 0)$, $0 \leq t \leq 1$ satisface la condición $\mathbf{l}(0) = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{l}(1) = (0, 1, 0)$. En este segmento, $x = 1 - t$, $y = t$ y $z = 0$. También $dx = -dt$, $dy = dt$ y $dz = 0$. Si sustituimos estos valores, obtenemos

$$\int_0^1 \left[\operatorname{sen} \pi(1-t)\,dt - (\cos \pi t)(0)\right] = \int_0^1 \operatorname{sen} \pi(1-t)\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\cos \pi(1-t)\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}\big(1-(-1)\big) = \frac{2}{\pi}.$$

El segmento siguiente se puede parametrizar mediante $\mathbf{l}(t) = (x, y, z) = (0, 1, 0) + t(0, -1, 1) = (0, 1-t, t)$ para $0 \leq t \leq 1$. También, $dx = 0$, $dy = -dt$ y $dz = dt$, entonces obtenemos

$$\int_0^1 \left[\operatorname{sen} \pi(0)(-dt) - \cos \pi(1-t)\,dt\right] = \frac{1}{\pi}\operatorname{sen} \pi(1-t)\Big|_0^1 = 0.$$

Por último, el tercer segmento se puede parametrizar mediante $\mathbf{l}(t) = (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(1, 0, -1) = (t, 0, 1-t)$ para $0 \leq t \leq 1$. También $dx = dt$, $dy = 0$ y $dz = -dt$, de modo que tenemos

$$\int_0^1 \left[\operatorname{sen} \pi t(0) - \cos \pi(0)(-dt)\right] = \int_0^1 1\,dt = 1.$$

Por lo tanto, la integral de línea alrededor del triángulo es $2/\pi + 0 + 1 = 2/\pi + 1$.

5. Comenzamos en $(0, 0)$ y calculamos la integral de línea sobre cada lado del cuadrado. Para el segmento de recta que une a $(0, 0)$ con $(a, 0)$, $y = 0$, $dy = 0$ y $0 \leq x \leq a$. Entonces

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^a \left[(x^2 - 0^2)\,dx + 2x(0)\cdot(0)\right] = \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}.$$

Para el segmento de recta que une a $(a, 0)$ con (a, a), $x = a$, $dx = 0$ y $0 \leq y \leq a$. Entonces

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^a \left[(a^2 - y^2)(0) + 2(a)y\,dy\right] = \int_0^a 2ay\,dy = ay^2\Big|_0^a = a^3.$$

Para el segmento de recta que une a (a, a) con $(0, a)$, $y = a$, $dy = 0$ y x varía de a hasta 0. Entonces

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^0 (x^2 - a^2)\, dx = -\int_0^a (x^2 - a^2)\, dx = -\left(\frac{a^3}{3} - a^3\right) = \frac{2a^3}{3}.$$

Por último, para el segmento de recta que une a $(0, a)$ con $(0, 0)$, $x = 0$, $dx = 0$ y y varía de a hasta 0. Entonces

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Sumamos y encontramos que la integral alrededor del cuadrado es $a^3/3 + a^3 + 2a^3/3 + 0 = 2a^3$.

7. (b) Primero completamos cuadrados: $(2x^2 - 8x + 8) + y^2 + z^2 = 1 + 8$ o $2(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 3^2$. Que tiene la forma $X^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, motivo por el cual usaremos coordenadas esféricas. Para la parametrización de x, sea $X = \sqrt{2}(x - 2) = 3\cos\theta \operatorname{sen}\varphi$, entonces $x = 2 + (3\cos\theta \operatorname{sen}\varphi)/\sqrt{2}$. Así, la parametrización es

$$x = 2 + (3\cos\theta \operatorname{sen}\varphi)/\sqrt{2}$$
$$y = 3 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$$
$$z = 3\cos\varphi,$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \varphi \leq \pi$. Ésta es una estrategia general para abordar muchos problemas sobre parametrización: completar cuadrados para cambiar coordenadas cartesianas en cilíndricas y esféricas.

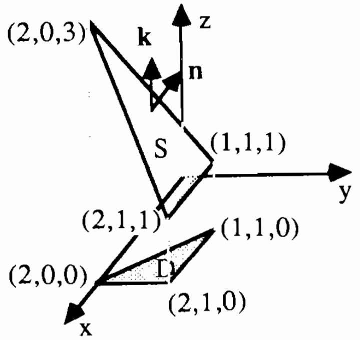
10. El área de la superficie de la gráfica que está sobre D es $\int\int_D \|\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y\|\, dx\, dy$ y el área de D es $\int\int_D dx\, dy$. La "parametrización" de la gráfica es $x = x$, $y = y$ y $z = f(x, y)$. Entonces $\mathbf{T}_x = \mathbf{i} + (\partial f/\partial x)\mathbf{k}$ y $\mathbf{T}_y = \mathbf{j} + (\partial f/\partial y)\mathbf{k}$. $\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = (\partial f/\partial x)\mathbf{i} + (\partial f/\partial y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\|\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y\| = \left[(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + 1\right]^{1/2}$. Como $(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 = c$, $\|\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y\| = \sqrt{1 + c}$. Si regresamos a la fórmula original, tenemos $\int\int_D \|\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y\|\, dx\, dy = \int\int_D \sqrt{1+c}\, dx\, dy$. Como c es una constante, descomponemos las constantes de la integral y tenemos $\sqrt{1+c}\int\int_D dx\, dy = \sqrt{1+c} \cdot (\text{área de } D)$.

12. (b) Usamos coordenadas cilíndricas. Sea $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$. Además, $z = x = r\cos\theta$ y los intervalos son $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ porque queremos estar dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Calculamos $\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta = (\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k}) \times (-r\operatorname{sen}\theta\mathbf{i} + r\cos\theta\mathbf{j} + r\operatorname{sen}\theta\mathbf{k}) = (-r\mathbf{i} + r\mathbf{k}) = r(-\mathbf{i} + \mathbf{k})$, entonces $\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| = \sqrt{2}r$. Por lo tanto,

$$\int x^2 dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos\theta)^2\sqrt{2}r\, dr\, d\theta = \left(\sqrt{2}\int_0^1 r^3 dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

15. 

Queremos calcular $\int_S x\,dS$, donde S es el triángulo con vértices $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$ y $(2, 0, 3)$. Primero, necesitamos encontrar la normal al triángulo: dos vectores en el triángulo son $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, -2)$ (los cuales se encontraron restando las coordenadas de los vértices). Tomamos su producto cruz y normalizamos el resultado, obtenemos la normal unitaria $\mathbf{n} = (0, 2, 1)/\sqrt{5}$, por tanto $\cos\theta = \mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = 1/\sqrt{5}$. Ahora, la proyección de S sobre el plano xy se puede describir mediante $-y + 2 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$, como se muestra en la figura. Entonces,

$$\int_S x\,dS = \sqrt{5}\int_D x\,dx\,dy = \sqrt{5}\int_0^1\int_{-y+2}^2 x\,dx\,dy = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^1 4-(2-y)^2 dy$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\left[4\frac{(2-y)^3}{3}\Big|_0^1\right] = \frac{5\sqrt{5}}{6}.$$

19. En este caso tenemos $\mathbf{F} = e^t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ y $d\mathbf{s} = e^t + \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$. Entonces

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (e^t\cdot e^t + t\cdot 1 + t^2\cdot 2t)\,dt = \int_0^1 (e^{2t} + t + 2t^3)\,dt$$

$$= \left(\frac{e^{2t}}{2}+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^2+1).$$

24. Nuestra superficie es $z^2 = 1 - x^2 - y^2$. Queremos la parte que está *sobre* el plano xy, es decir, queremos $z \ge 0$ o $f(x, y) = z = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$. Para el área de la gráfica de una superficie que está sobre D, la fórmula es

$$A = \int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy.$$

En este caso,

$$f_x = \frac{-1}{2}\cdot 2x(1-x^2-y^2)^{-1/2} = \frac{-x}{(1-x^2-y^2)^{1/2}}$$

y

$$f_y = \frac{-y}{(1-x^2-y^2)^{1/2}} \qquad \text{(por simetría).}$$

De manera que el integrando es

$$\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}=\frac{1}{(1-x^2-y^2)^{1/2}}.$$

El área que queremos es

$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\frac{1}{(1-x^2-y^2)^{1/2}}\,dy\,dx.$$

Queremos evaluar una de las integrales. Sea $u^2=(1-x^2)^{1/2}$. Como u es independiente de y, la integral en y se transforma en

$$\int_{-a}^{a}\frac{1}{(u^2-y^2)^{1/2}}dy=\frac{1}{u}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{1-(y/u)^2)}}dy.$$

Si sustituimos $v=y/u$ con $dy=u\,dv$, obtenemos

$$\int_{-a/u}^{a/u}\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}=\operatorname{sen}^{-1}(v)\Big|_{-a/u}^{a/u}=2\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{a}{u}\right)=2\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Insertamos este resultado en la integral original y obtenemos la fórmula para el área de la superficie:

$$2\int_{-a}^{a}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$$

27. (c) Usamos coordenadas cilíndricas: $x=2\cos\theta$, $y=2\operatorname{sen}\theta$, $z=z$, $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le z\le x+3=2\cos\theta+3$. (Observa la diferencia entre la parametrización de este ejemplo y la usada en el problema 12.) $\|\mathbf{T}_\theta\times\mathbf{T}_z\|=\|(-2\operatorname{sen}\theta\mathbf{i}+2\cos\theta\mathbf{j})\times\mathbf{k}\|=\|2\cos\theta\mathbf{i}+2\operatorname{sen}\theta\mathbf{j}\|=2$. Entonces el área de la superficie es

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^{2\cos\theta+3}2z^2dz\,d\theta\\
&=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}(2\cos\theta+3)^3d\theta\\
&=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(8\cos^3\theta+36\cos^2\theta+54\cos\theta+27)\,d\theta\\
&=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left[8(1-\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta+36\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)+54\cos\theta+27\right]d\theta\\
&=\frac{2}{3}\left[8\left(\operatorname{sen}\theta-\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\right)+18\left(\theta+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right)+54\operatorname{sen}\theta+27\theta\right]\Big|_0^{2\pi}\\
&=(2/3)[18\cdot 2\pi+27\cdot 2\pi]=60\pi.
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 8
TEOREMAS INTEGRALES DEL ANÁLISIS VECTORIAL

8.1 Teorema de Green

OBJETIVOS

1. Poder enunciar el teorema de Green.

2. Poder usar el teorema de Green para calcular una integral de línea o una integral doble.

2. Poder usar el teorema de Green para encontrar un área.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Notación.* Recuerda que ∂, el mismo signo usado para derivadas parciales, significa frontera. Entonces, ∂D es la frontera de D.

2. *Teorema de Green.* En ciertas condiciones, una integral de línea se puede convertir en una integral de superficie:

$$\int_D (P\,dx + Q\,dy) = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

   Uno de los lados de la ecuación suele ser mucho más fácil de calcular que el otro.

3. *Condiciones necesarias.* (a) C debe ser una curva *cerrada* con orientación igual al giro de las manecillas del reloj (la región debe estar a tu izquierda si caminas sobre la curva siguiendo la orientación correcta), y
   (b) P y Q deben tener primeras derivadas continuas.
   Si el teorema de Green no se puede aplicar directamente a una región, con frecuencia dicha región se puede dividir de manera que el teorema de Green sí sea aplicable. Observa la figura 8.1.5.

4. *Teorema de Green y el área.* El área de D se puede calcular mediante la fórmula

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(x\,dy - y\,dx).$$

Una vez más, ∂D tiene la misma orientación que el giro de las manecillas del reloj. Esta fórmula es más útil si la frontera tiene una parametrización sencilla; de otra forma, la integral doble suele ser más sencilla.

5. *Forma vectorial.* Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, entonces $\nabla \times \mathbf{F} = (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\mathbf{k}$, de modo que otra formulación del teorema de Green es

$$\int_{\partial D}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_D (\nabla \times \mathbf{F})\cdot \mathbf{k}\, dA,$$

donde $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$.

6. *Teorema de la divergencia en el plano.* Si $\mathbf{n}$ es un vector normal unitario a ∂D y apunta hacia afuera, entonces

$$\int_{\partial D}\mathbf{F}\cdot ds = \int_D \operatorname{div}\mathbf{F}\, dA.$$

Comparamos esto con el teorema de la divergencia de Gauss en el espacio (Sec. 8.4).

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

2. De acuerdo con el teorema de Green, el área de la región D es

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(x\,dy - y\,dx).$$

Como D es un disco con centro en $(0,0)$ de radio R, la frontera ∂D se puede parametrizar mediante

$$x = R\cos\theta \quad \text{y} \quad y = R\,\text{sen}\,\theta, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Entonces, $dx = -R\,\text{sen}\,\theta\, d\theta$, $dy = -R\cos\theta\, d\theta$ y por lo tanto el área es

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big[(R\cos\theta)(R\cos\theta) - (R\,\text{sen}\,\theta)(R\,\text{sen}\,\theta)\big]d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2 d\theta = \pi R^2,$$

la cual es, en efecto, el área que calculamos usando geometría elemental.

3. (b) Trabajaremos con la parametrización de ∂D que se usó en el ejercicio 2. El lado izquierdo de la identidad del teorema de Green es

$$\int_{\partial D}(P\,dx + Q\,dy) = \int_{\partial D}(x+y)dx + \int_{\partial D} y\,dy$$
$$= \int_0^{2\pi}(R\cos\theta + R\,\mathrm{sen}\,\theta)(-R\,\mathrm{sen}\,\theta)d\theta + \int_0^{2\pi}(R\,\mathrm{sen}\,\theta)(R\cos\theta)d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}(-R^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + R^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)d\theta$$
$$= -R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2\,\theta\,d\theta = -R^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta + -R^2\pi.$$

Por el teorema de Green la misma integral debe ser igual a

$$\int\int_D x\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Otra vez usaremos coordenadas polares. Podemos describir D mediante $0 \leq r \leq R$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Ahora calculamos $\partial Q/\partial x = 0$ y $\partial P/\partial y = 1$ y, si tenemos presente que el jacobiano para coordenadas polares es r, el lado derecho del teorema de Green se transforma en

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R (0-1)r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R -r\,dr\,d\theta = -\pi R^2.$$

Por lo tanto, hemos verificado el teorema de Green en este caso.

5. El teorema de Green nos dice que el área es

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(xdy - ydx).$$

De la parametrización dada para el cicloide obtenemos $dx = a(1-\cos\theta)\,d\theta$ y $dy = a\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta$. Recuerda que el eje x forma parte de la frontera que se puede describir mediante $x = 2\pi a(1-u)$ y $y = 0$ para $0 \leq u \leq 1$. Observa que nuestro cicloide se recorre en el *mismo sentido que el giro de las manecillas del reloj,* es decir, de izquierda a derecha como en la figura del libro. Luego regresamos de derecha a izquierda por el eje x. Como $y = dy = 0$, el área deseada es

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a(\theta - \mathrm{sen}\,\theta)\cdot a\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta - a(1-\cos\theta)\cdot a(1-\cos\theta)d\theta]$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1(x\cdot 0 - 0\cdot dx)$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta - a^2 + 2a^2\cos\theta - a^2\cos^2\theta)d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - 2a^2\theta + 2a^2\cos\theta)d\theta.$$

Si usamos integración por partes obtenemos

$$-\frac{a^2}{2}\theta\cos\theta\Big|_0^{2\pi}+\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[-2a^2+2a^2\cos\theta]d\theta$$

$$=-a^2\pi+(1/2)(-2a^2\theta+2a^2\operatorname{sen}\theta)\Big|_0^{2\pi}=-3a^2\pi.$$

Si queremos obtener la respuesta correcta, debemos recordar que la orientación adecuada debe ser en *sentido contrario al giro de las manecillas del reloj.* Cambiando sólo el signo obtenemos el área contenida en un arco del cicloide, $3a^2\pi$.

8. Sea D la unión de las regiones del tipo 3, D_i, donde cada frontera, ∂D_i, está orientada en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj. Supongamos que P y Q tienen derivadas parciales continuas en D. Queremos demostrar que la integral sobre la frontera de D es igual a la suma de las integrales sobre la frontera de todas las D_i. Dos regiones contiguas comparten una fracción de sus fronteras. Cuando se consideran las orientaciones, las contribuciones a la integral de este sector de frontera se eliminan como se muestra en la figura 8.1.5. Por lo tanto

$$\int_{\partial D}(Pdx+Qdy)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial D_i}(Pdx+Qdy)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\iint_{D_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

11. (a) En coordenadas polares, sea $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$. Entonces se puede describir D mediante $0 \le r \le 1$ y $0 \le \theta \le 2\pi$. Calculamos que $\operatorname{div}\mathbf{F} = 1 + 1 = 2$. (Si es necesario, debes repasar la forma de calcular una divergencia en la sección 3.4.) Como el jacobiano para coordenadas polares es r, obtenemos

$$\int_d \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1(2)r\,dr\,d\theta=2\pi.$$

Por otro lado, sabemos que la normal unitaria al circulo de radio 1 que apunta hacia afuera es $\mathbf{n} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, por lo tanto

$$\int_{\partial D}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds=\int_0^{2\pi}(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)\cdot(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)\,ds=\int_0^{2\pi}ds=2\pi.$$

(b) Queremos calcular

$$\int_{\partial D}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds,$$

donde $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$. Por el teorema de la divergencia, la integral anterior es igual a

$$\int\int_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA = \int\int_D (2y - 2y) dx\, dy = 0.$$

15. Como $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, sea $x/a = \cos\theta$ $y/b = \operatorname{sen}\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Entonces $x = a\cos\theta$, $dx = -a\operatorname{sen}\theta\, d\theta$, $y = b\operatorname{sen}\theta$ y $dy = b\cos\theta\, d\theta$. Por el teorema de Green, el área de la elipse es

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{\partial D}(x\, dy - y\, dx) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(a\cos\theta)(b\cos\theta) - (b\operatorname{sen}\theta)(-a\operatorname{sen}\theta)]d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\, d\theta = ab\pi. \end{aligned}$$

16. En coordenadas polares, sea $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$. Como r es una función de θ, obtenemos $dx = (r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta)\, d\theta$ y $dy = (r'\operatorname{sen}\theta - r\cos\theta)\, d\theta$ (en este caso r' denota la derivada de r respecto a θ). Si sustituimos en la igualdad del teorema de Green, obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_C (x\, dy - y\, dx) \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b [(r\cos\theta)(r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta)d\theta - (r\operatorname{sen}\theta)(r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta)]d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b r^2(\cos^\theta + \operatorname{sen}^2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_a^b r^2\, d\theta. \end{aligned}$$

19. Para formar uno de los pétalos de la rosa tomamos desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi/2$. Si usamos el resultado del ejercicio 16, obtenemos que el área es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(3\operatorname{sen}2\theta)^2 d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(9\operatorname{sen}^2 2\theta)d\theta \\ &= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta \\ &= \frac{9}{4}\left(\theta + \frac{\operatorname{sen}4\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{9\pi}{8}. \end{aligned}$$

22. Usamos la definición dada para $\partial u/\partial n$ y aplicamos el teorema de la divergencia en el plano a la región $B = B_\rho$:

$$\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{\partial B} \nabla u \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_B \nabla \cdot (\nabla u) dA = \int_B \nabla^2 u\, dA.$$

26. (a) Supongamos que $u(\mathbf{p})$ es un punto máximo sobre D. Del ejercicio 25, $u(\mathbf{p})$ es el *valor promedio* de u en un disco de radio R con centro en $\mathbf{p}$. Esto es posible sólo si $u(\mathbf{p}) = u(\mathbf{q})$ para toda $\mathbf{q}$ en D. En efecto, si $u(\mathbf{q}) < u(\mathbf{p})$ para alguna $\mathbf{q}$ en D, debe suceder que $u(\mathbf{r}) > u(\mathbf{p})$ para mantener el promedio. Entonces, u debe ser constante en algún disco con centro en $\mathbf{p}$.

8.2 Teorema de Stokes

OBJETIVOS

1. Poder enunciar y usar el teorema de Stokes.

2. Poder usar el teorema de Stokes para calcular una integral de línea sobre una curva cerrada o una integral de superficie con la curva cerrada como su frontera.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Repaso.* En esta sección usaremos integrales de superficie. Debes repasar la sección 7.6 si has olvidado cómo calcular una integral de superficie.

2. *Relación con el teorema de Green.* Al igual que el teorema de Green, el teorema de Stokes convierte una integral de una dimensión en una integral de dos dimensiones. El teorema de Stokes es una generalización del teorema de Green.

3. *Teorema de Stokes para gráficas.* Si $z = f(x, y)$, entonces

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Debes memorizar esta fórmula. Del mismo modo que en el teorema de Green, ∂S está orientada de manera que la superficie esté a tu izquierda si caminas sobre ∂S, la cual debe ser una curva cerrada.

4. *Superficies generalizadas.* Si la superficie S no es la gráfica de una función, entonces el teorema de Stokes también es válido si podemos describir S mediante una parametrización uno a uno. ∂D se mapea en ∂S, de modo que ∂D, la frontera de la

región en donde reside la parametrización, debe tener la orientación correcta. Como ejemplo cuando la orientación es importante, consulta la solución del ejercicio 5 de la sección 8.1.

5. *Aplicación.* De acuerdo con el teorema de Stokes, para evaluar $\int_S$ rot $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, podemos cambiar la superficie S por cualquier otra que tenga la misma frontera ∂S. En la mayoría de los casos, cambiaremos S por una superficie plana. Imaginemos un alambre que forma una trayectoria cerrada al que se le ha colocado una hoja elástica. La integral de superficie de un rotacional sobre cualquier superficie formada por una deformación de la hoja elástica será igual a la integral de línea sobre el alambre (suponiendo que el alambre no se puede deformar).

6. *Circulación.* Debes saber que el rotacional $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}$ es la circulación de $\mathbf{V}$ por unidad de área de la superficie perpendicular a $\mathbf{n}$.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (b) Por el teorema de Stokes sólo necesitamos evaluar

$$\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s},$$

donde ∂S es el círculo $x^2+y^2=1$, la frontera de la superficie. Parametrizamos el círculo en coordenadas polares, $x=\cos\theta$ y $y=\operatorname{sen}\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$. Entonces la integral es

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\theta) - \cos\theta(\cos\theta)\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi.\end{aligned}$$

4. (d) Queremos demostrar que la derivada del flujo magnético con respecto al tiempo es 0. Comenzamos con

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{H}\cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = -\int_S -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}.$$

El primer paso se justifica porque S no es una función del tiempo. Por la ley de Faraday, obtenemos

$$-\int_S (\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{S}.$$

Entonces, por el teorema de Stokes y por el hecho de que $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=0$, (la última igualdad es válida porque $\mathbf{E}$ es perpendicular a la frontera de S) obtenemos

$$-\int_{\partial S} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0.$$

5. La frontera de la superficie es una curva cerrada, de modo que podemos aprovechar el teorema de Stokes
$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$
La frontera es el círculo $x^2 + y^2 = 1, z = 0$. El lado derecho de la igualdad anterior es
$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial S} (x, y) \cdot (dx, dy).$$
Ahora usamos coordenadas polares: $x = \cos\theta$, $dx = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$; $y = \operatorname{sen}\theta$, $dy = \cos\theta\, d\theta$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Si sustituimos en la última integral tenemos
$$\int_0^{2\pi} (-\cos\theta \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta)d\theta = 0.$$

9. Utilizaremos el teorema de Stokes. La frontera de S es el círculo $y^2 + z^2 = 1, x = 0$. En la frontera $\mathbf{F}$ es $-y^3\mathbf{j}$. Usaremos coordenadas polares $y = \operatorname{sen}\theta$, $z = \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Por el teorema de Stokes tenemos
$$\int\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{-1}{4}\operatorname{sen}^4\theta\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

12. La razón del flujo es $\int_S \operatorname{rot}\Phi \cdot d\mathbf{S}$ y por el teorema de Stokes, éste es $\int_{\partial S} \Phi \cdot d\mathbf{s}$. La frontera está en el plano xy donde $z = 0$. Parametrizamos la frontera mediante
$$x = (R/4)\cos\theta, y = (R/4)\operatorname{sen}\theta.$$
Entonces el flujo es
$$\int_{\partial S} \Phi \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{16}(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)d\theta = \frac{\pi R^2}{8}.$$

14. Por el teorema de Stokes,
$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$
Como $\mathbf{F}$ es perpendicular a la tangente de la frontera de S, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$. Por lo tanto, $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$. Si $\mathbf{F}$ es un campo eléctrico, esto significa que la razón de cambio de flujo magnético es cero por la ley de Faraday. Consulta el ejemplo 4.

21. Primero calcularemos $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$. Obtenemos $\nabla \times \mathbf{F} = (1, 1, 1)$. También, $\Phi_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$ y $\Phi_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 1)$, entonces $\Phi_r \times \Phi_\theta = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r)$. Por lo tanto, obtenemos
$$\int_S (1, 1, 1) \cdot (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r)dr\, d\theta = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + r)d\theta\, dr$$
$$= \int_0^1 (\frac{\pi}{2}r)dr = \frac{\pi}{4}.$$

Por otro lado, la frontera, ∂S, está formada por 4 partes. Primero, cuando $r = 1$ tenemos $\Phi(1, \theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \theta)$, de modo que $\mathbf{F} = (\theta, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y $d\mathbf{s} = d\Phi(1, \theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 1)\, d\theta$. Por consiguiente,

$$\int_{\partial S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{\pi/2} (\theta, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 1) d\theta.$$

Si aplicamos integración por partes sobre $-\theta \operatorname{sen}\theta$ y la fórmula de la mitad de un ángulo para integrar $\cos^2\theta$, obtenemos

$$\left[(\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) + \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right) - \cos\theta\right] \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Cuando $\theta = \pi/2$, conservamos la orientación si r varía de 1 a 0. Entonces, tenemos

$$\int_{\partial S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^0 \left(\frac{\pi}{2}, 0, r\right) \cdot (0, 1, 0)\, dr = 0.$$

Cuando $r = 0$, θ va de $\pi/2$ a 0, de manera que obtenemos

$$\int_{\partial S_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\pi/2}^0 (\theta, 0, 0) \cdot (0, 0, 1)\, d\theta = 0.$$

De manera similar, cuando $\theta = 0$, el resultado es

$$\int_{\partial S_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (0, r, 0) \cdot (1, 0, 0)\, dr = 0.$$

Si sumamos todas las partes, la integral sobre la curva completa es $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \pi/4 + 0 + 0 + 0 = \pi/4$, en consecuencia, hemos verificado el teorema 6.

25. Para un cálculo directo, parametrizamos la superficie de la manera siguiente: Sea $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$, entonces $z = (1/2)(x^2 + y^2) = r^2/2$. También queremos $0 \leq z \leq 2$, de modo que $0 \leq r^2/2 \leq 2$ o $0 \leq r \leq 2$. Además tenemos $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Calculamos $\mathbf{T}_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$ y $\mathbf{T}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, r)$ de manera que la normal exterior es $\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_r = (-r^2\cos\theta, -r^2\operatorname{sen}\theta, -r)$. También calculamos

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix}$$

$$= (z^2 - x, 0, -z - 3) = \left(\frac{1}{4}r^4 - r\cos\theta, 0, \frac{-1}{2}r^2 - 3\right).$$

Por último,

$$
\begin{aligned}
\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_r)\, d\theta\, dr \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left[-r^2 \cos\theta \left(\frac{1}{4} r^4 - r\cos\theta \right) + r\left(\frac{1}{2} r^2 + 3 \right) \right] d\theta\, dr \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{-r^6}{4} \cos\theta + r^3 \cos^2\theta \frac{1}{2} r^3 + 3r \right] d\theta\, dr \\
&= \int_0^2 \left[\left(\frac{r^6}{4} \operatorname{sen}\theta + r^3 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} r^3 + 3r \right) \theta \right) \Big|_{\theta=0}^{2\pi} \right] dr \\
&= \int_0^2 (2\pi r^3 + 6\pi r) dr = \left(\frac{\pi r^4}{2} + 3\pi r^2 \right) \Big|_0^2 = 20\pi.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, por el teorema de Stokes, $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. La frontera es ∂S, que es un círculo de radio 2 en $z = 2$. Se puede parametrizar mediante $(2\cos t, -2\operatorname{sen} t, 2)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Usamos esta orientación porque la superficie está debajo de la frontera, en consecuencia, se debe recorrer con la misma orientación *que el giro de las manecillas del reloj.* Calculamos $d\mathbf{s} = (-2\operatorname{sen} t, -2\cos t, 0)\, dt$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} (-6\operatorname{sen} t, -4\cos t, -8\operatorname{sen} t) \cdot (-2\operatorname{sen} t, -2\cos t, 0) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (12\operatorname{sen}^2 t + 8\cos^2 t) dt \\
&= \left[12\left(\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right) + 8\left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right) \right] \Big|_0^{2\pi} = 20\pi.
\end{aligned}
$$

8.3 Campos conservativos

OBJETIVOS

1. Entender que la integral de línea de un campo gradiente es independiente de la trayectoria.

2. Poder determinar si un campo vectorial es conservativo.

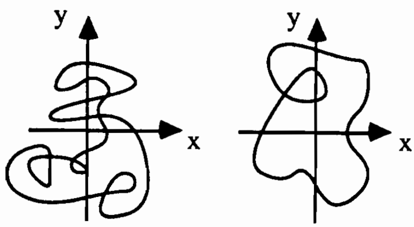
3. Dado un campo vectorial conservativo, poder encontrar una función escalar cuyo gradiente sea igual a dicho campo vectorial.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Teorema 7.* Éste es un teorema muy importante. En resumen, establece que si $\mathbf{F}$ es un gradiente, entonces $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, la integral de línea depende sólo de los puntos extremos y todas las integrales de línea sobre curvas cerradas son 0. El converso también es cierto. Si se cumplen las condiciones del teorema decimos que las integrales de línea son "independientes de la trayectoria". Observa que si una sola integral de línea es 0, entonces no es forzoso que $\mathbf{F}$ sea un gradiente.

2. *Ejemplo 1.* En el método 2, parte (a), observa cómo después de integrar respecto a x, sumamos una "constante" $h_1(y, z)$. Ésta es una "constante" porque sólo contiene a las otras variables. Estudia el ejemplo 1 con cuidado. Debes saber cómo usar al menos uno de los dos métodos.

3. *Gradientes en* $\mathbf{R}^2$. El corolario que precede al ejemplo 3 nos dice que si la integral del teorema de Green, $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$, es 0, entonces $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ es un gradiente. ¡Cuidado! $\mathbf{F}$ debe ser C^1 en *todo* $\mathbf{R}^2$, a diferencia del teorema 7, que permite algunos puntos excepcionales. El ejercicio 12 estudia esta situación. La integral de $\mathbf{F}$ sobre la trayectoria de la izquierda (una trayectoria cerrada) es 0 porque la curva no encierra al origen, mientras que la integral de $\mathbf{F}$ sobre la trayectoria de la derecha no es 0.



4. *¿Es* $\mathbf{F}$ *un rotacional?* $\mathbf{F}$ es el rotacional de algún campo vectorial si $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$. El ejercicio 16 explica el procedimiento para encontrar $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{G}$.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

2. (a) Como $y = 2x^2$, tenemos $dy = 4x\,dx$, y por tanto

$$\int_\sigma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (x \cdot 2x^2)dx + (2x^2)^2 \cdot 4x dx$$

$$= \int_0^1 (2x^3 + 16x^5)dx = \frac{1}{2} + \frac{8}{3} = \frac{19}{6}$$

(b) La respuesta es sí, porque

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & y^2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -x) \neq \mathbf{0}.$$

Como método alternativo podemos elegir una trayectoria diferente y demostrar que la integral de línea no es igual a $19/6$. Esto significaría que la integral de **F** depende de la trayectoria.

3. Si $\mathbf{F} = \nabla F$, entonces la componente x de **F** debe ser $\partial f/\partial x$, es decir,

$$\partial f/\partial x = 2xyz + \operatorname{sen} x \tag{1}$$

De manera similar, la componente y de **F** debe ser $\partial f/\partial y$ y la componente z de **F** debe ser $\partial f/\partial z$, es decir,

$$\partial f/\partial y = x^2 z \tag{2}$$

$$\partial f/\partial z = x^2 y \tag{3}$$

Si integramos (1) con respecto a x, obtenemos $f = \int(2xyz+\operatorname{sen} x)\,dx = x^2yz-\cos x+ h(y, z)$, donde h es una función que sólo depende de y y z. Cuando integramos con respecto a x debemos restaurar todos los términos que contienen dicha variable. Cuando derivamos se debe tratar como constantes a todos los términos que no contienen x y cuando integramos con respecto a x no podemos restaurarlos. De manera similar, integramos (2) con respecto a y y obtenmos $f = \int x^2z\,dy = x^2zy + g(x, z)$, donde $g(x, z)$ es una función que sólo depende de x y z. Si integramos (3) con respecto a z obtenmos $f = \int x^2y\,dz = x^2yz + k(x, y)$, donde $k(x, y)$ es una función que sólo depende de x y y. Comparemos estos tres resultados: $f(x, y, z) = x^2yz - \cos x + h(y, z) = x^2yz + g(x, z) = x^2yz + k(y, z)$. Llegamos a la conclusión (por inspección) de que $g(x, z) = k(x, y) = -\cos x + C$. y $h(y, z) = C$, donde C es una constante. Entonces

$$f(x, y, z) = x^2yz - \cos x + C.$$

6. Usamos la regla de la cadena para calcular $(\partial/\partial x)(1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = -x/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$. Luego, por simetría, obtenemos

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{-(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}.$$

Como **F** es el gradiente de una función f, $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = f(\boldsymbol{\sigma}(b)) - f(\boldsymbol{\sigma}(a))$ para cualquier trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(s)$ que comience en a y termine en b. Esto es verdadero sólo si $\boldsymbol{\sigma}$ no pasa por el origen.

9. El lector debe verificar que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, **F** es el gradiente de una función $f(x, y, z)$. Integramos la componente **i** con respecto a x, la componente **j** con respecto a y y la componente **k** con respecto a z. Si comparamos los resultados, vemos que $f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y + z^3/3$. También calculamos $\boldsymbol{\sigma}(0) = (0, 0, 1)$ y

$\boldsymbol{\sigma}(1) = (1, 1, e)$. Como $\mathbf{F}$ es un gradiente, tenemos $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f\big(\boldsymbol{\sigma}(1)\big) - f\big(\boldsymbol{\sigma}(0)\big) = e \operatorname{sen} 1 + e^3/3 - 1/3$.

13. (b) $\mathbf{F}$ *no* es el gradiente de una función escalar f. Si existiera tal f, entonces $\partial f/\partial x = xy$ y $\partial f/\partial y = xy$. Por la igualdad de las parciales mixtas, deberíamos esperar que $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$. Pero en este caso, $(\partial/\partial y)(\partial f/\partial x) = x$ y $(\partial/\partial x)(\partial f/\partial y) = y$.

15. (b) Para demostrar que Φ es conservativo podemos demostrar que es gradiente. (También podemos demostrar que satisface cualquiera de las cuatro condiciones del teorema 7.) Usaremos el mismo método que en el ejercicio 13. Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y^2+1}\right) = \frac{(2x)(-2y)}{(y^2+1)^2} = \frac{-4xy}{(y^2+1)^2};$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2y(x^2+1)}{(y^2+1)^2}\right) = \frac{-4xy}{(y^2+1)^2}.$$

Como estas parciales son iguales, Φ es conservativo. Esto hace que la evaluación de integrales de línea sea sencilla. Debes verificar que si $f(x, y) = (x^2+1)/(y^2+1)$, entonces $\Phi = \nabla f$. Luego sustituimos $x = t^3 - 1$ y $y = t^6 - t$ para obtener $f(t) = \left[(t^3-1)^2+1\right]/\left[(t^6-t)^2+1\right]$, y por lo tanto

$$\int_C \Phi \cdot d\mathbf{s} = \left[\frac{(t^3-1)^2+1}{(t^3-t)^2+1}\right]\Big|_0^1 = -1.$$

18. Primero calculamos $\nabla \cdot \mathbf{F} = (\partial/\partial x)xz + (\partial/\partial y)(-yz) + (\partial/\partial z)y = z - z + 0 = 0$. Por tanto, existe $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$. Para encontrar $\mathbf{G}$, usamos el resultado del ejercicio 16:

$$G_1 = \int_0^z -yt\,dt - \int_0^y t\,dt \frac{-yz^2}{2} - \frac{y^2}{2},$$
$$G_2 = -\int_0^z xt\,dt = \frac{-xz^2}{2}, \quad \text{y} \quad G_3 = 0.$$

Por consiguiente, $\mathbf{G} = (-1/2)\left[(yz^2+y^2)\mathbf{i} + xz^2\mathbf{j}\right]$. Es buena idea que calcules rot $\mathbf{G}$ para verificar tu respuesta:

$$\nabla \times \mathbf{G} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz^2+y^2 & xz^2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-2xz\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + (z^2 - z^2 - 2y)\mathbf{k})$$
$$= xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + y\mathbf{k} = \mathbf{F}.$$

Observa que **G** no es única; por ejemplo, debemos sumar constantes arbitrarias para cada componente de **G** y $\nabla \times \mathbf{G}$ aún debe ser igual a **F**.

23. (a) Recuerda que en el capítulo 3 vimos el hecho de que **F** no sea irrotacional significa que rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$. Así, calculamos rot F:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{k} \neq \mathbf{0}.$$

(b) Sea $\boldsymbol{\sigma}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ la trayectoria del corcho. Por la definición de líneas de flujo, $\boldsymbol{\sigma}'(t) = \mathbf{F}\big(\boldsymbol{\sigma}(t)\big)$, y por tanto $\boldsymbol{\sigma}'(t) = \big(-y(t), x(t), 0\big)$. Esto equivale a tener el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x'(t) = -y(t) \tag{1}$$

$$y'(t) = x(t) \tag{2}$$

$$z'(t) = 0 \tag{3}$$

La ecuación (3) se puede resolver fácilmente. Su solución es $z(t) =$ constante. Si tomamos una derivada más con respecto a t obtenemos $x''(t) = -y'(t)$, pero (2) implica que $x''(t) = -x(t)$ o $x''(t) + x(t) = 0$. Esta ecuación representa un oscilador armónico. La famosa solución a la ecuación diferencial $x''(t)+x(t) = 0$ es

$$x(t) = A \operatorname{sen} t + B \cos t,$$

donde A y B son constantes. Si no estás familiarizado con las técnicas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, puedes verificar mediante sustitución que ésta es, en efecto, la solución. De manera similar,

$$y(t) = C \operatorname{sen} t + D \cos t,$$

donde C y D son constantes. Como $x''(t) = -y'(t)$, derivamos x y y y comparamos términos para encontrar que $C = B$ y $D = -A$. Por lo tanto, $y(t) = B \operatorname{sen} t - A \cos t$. Si elevamos al cuadrado x y y y los sumamos, obtenemos $x^2+y^2 = A^2 \operatorname{sen}^2 t + 2AB \operatorname{sen} t \cos t + B^2 \cos^2 t + B^2 \operatorname{sen}^2 t - 2AB \operatorname{sen} t \cos t + A^2 \cos^2 t = A^2 + B^2$. Como $A^2 + B^2$ es una constante, identificamos la ecuación $x^2 + y^2 = A^2 + B^2$ como la ecuación del círculo de radio $\sqrt{A^2 + B^2}$ con centro en $(0, 0)$. Por lo tanto, el corcho tiene una trayectoria circular alrededor del eje z en un plano paralelo al plano xy.

(c) Como y aumenta su valor, x decrece, ya que $x'(t) = -y$. También sabemos que el corcho recorre un círculo. De modo que el corcho gira en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj.

24. (c) La propiedad de ser rotacional es local, es decir, el campo es rotacional en un punto. En el ejercicio 23 el corcho gira sobre sí mismo mientras recorre el círculo, pero en el ejercicio 24 no es así. Las trayectorias aisladas tienen poco que ver con la rotacionalidad del fluido.

8.4 Teorema de Gauss

OBJETIVOS

1. Poder enunciar y usar el teorema de Gauss.

2. Saber usar el teorema de Gauss con el propósito de calcular una integral doble sobre una superficie cerrada o una integral triple sobre un volumen encerrado por una superficie.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Definición.* Una *Superficie cerrada* es aquella que se debe perforar para poder llegar a la región que encierra. La región que encierra se denota con Ω y la superficie cerrada se denota con $\partial\Omega$.

2. *Teorema de la divergencia de Gauss.* Si $\partial\Omega$ es una superficie cerrada, entonces

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{F})\, dV = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, d\mathbf{S}.$$

Así, una integral triple se reduce a una doble o viceversa. Compara este resultado con el teorema de la divergencia en el plano (Sec. 8.1).

3. *Interpretación física.* div $\mathbf{F}(P)$ es el flujo hacia afuera en el punto P por unidad de volumen. Si div $\mathbf{F}(P) > 0$, el material fluye hacia afuera, en este caso P se llama fuente. P es un sumidero si div $\mathbf{F}(P) < 0$. Si div $\mathbf{F}(P) = 0$, el campo vectorial está libre de divergencia, es decir, todo lo que entra debe de salir.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

4. (a) Los vectores normales unitarios a las caras que son paralelas al plano xy y que apuntan hacia afuera son $\mathbf{i}$ y $-\mathbf{i}$, respectivamente. Para estas dos caras, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} &= \int_0^1 \int_0^1 (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i}\, dy\, dz + \int_0^1 \int_0^1 (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i})\, dy\, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i}-\mathbf{i}) dy\, dz = 0\end{aligned}$$

Los vectores normales unitarios $\mathbf{n}$ para cualquier par de caras paralelas son exactamente opuestos, de modo que las integrales sobre estas caras del cubo se

eliminan. Por lo tanto, la integral es 0. Ahora vemos que $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, así que, por el teorema de la divergencia, la integral deseada es

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = 0.$$

6. (b) Primero vemos que $\operatorname{div}\mathbf{F} = 1 + 1 + 1 = 3$, entonces por el teorema de la divergencia,

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = 3\int_{\Omega} dV,$$

la cual es 3 veces el volumen de Ω. Ahora el problema es hallar el volumen de la región que nos ocupa. Usaremos coordenadas "cilíndricas". El valor θ variará de $-\pi/2$ a $\pi/2$ porque $x \geq 0$. Además, tenemos $0 \leq r \leq 1$ y $x^2 + y^2 = r^2 \leq z \leq 1$. Por lo tanto,

$$\int_{\Omega} dV = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1\int_{r^2}^1 r\,dz\,dr\,d\theta = \pi\int_0^1 r(1-r^2)dr = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Entonces,

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot ds = 3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

10. Usaremos el teorema de la divergencia. Tenemos $\operatorname{div}\mathbf{F} = (x^2+y^2)^2$, entonces

$$\int\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_{S} (x^2+y^2)^2 dV.$$

Usaremos coordenadas cilíndricas. Podemos describir el cilindro S mediante $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq z \leq 1$. Como el jacobiano es r, obtenemos

$$\int\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 r\cdot r^4 dr\,dz\,d\theta = 2\pi\int_0^1 r^6\,dr = \frac{\pi}{3}.$$

16. De la sección 8.3 sabemos que $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ implica $\mathbf{F} = \nabla f$, entonces si tomamos la divergencia de ambos lados obtenemos $\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot(\nabla f) = \nabla^2 f$. Pero tenemos $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$. Por lo tanto, $\nabla^2 f = 0$.

18. Por el teorema de la divergencia $\int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$. Dado que $\mathbf{F}$ es tangente a la superficie, sabemos que $\mathbf{F}$ es perpendicular a la normal unitaria de la superficie S, y entonces $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 0$. Por lo tanto, $\int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = 0$.

8.5 Aplicaciones a la física y ecuaciones diferenciales

OBJETIVOS

1. Saber usar las técnicas del análisis vectorial en aplicaciones tales como electromagnetismo y función de Green.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Notación.* Hay gran cantidad de notación nueva, de modo que debes encontrar útil hacer una lista de los símbolos nuevos y sus definiciones.

2. *Conceptos viejos.* No se presenta material de matemáticas nuevo en esta sección. Sólo hemos cambiado la terminología. Debes poder justificar cada paso con el conocimiento adquirido en secciones anteriores.

3. *Función delta de Dirac.* La "función" delta de Dirac es una herramienta muy importante en la física. Sus propiedades más importantes son que puede "destacar" el valor de una función en un punto particular y hacerlo "máximo" en un punto.

4. *Función de Green.* La función de Green es una herramienta importante para resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas con condiciones en la frontera. Nos da la solución si todos los "componentes" (carga, masa, etc.) se concentran en un punto; mediante integración nos da la solución que resuelve la ecuación para una distribución particular de los componentes.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

4. Dada $\nabla^2\varphi = 0$ y $\mathbf{V} = \nabla\varphi$, queremos demostrar que $\rho(\partial\mathbf{V}/\partial t + \mathbf{V}\cdot\nabla V) = -\nabla p$ si $\partial\mathbf{V}/\partial t = 0$. Si Usamos el ejercicio 3, $\mathbf{V}\cdot\nabla V = (1/2)\nabla(\|\mathbf{V}\|^2) + (\nabla\times\mathbf{V})\mathbf{V}$. Como $\mathbf{V}$ es un gradiente, $\nabla\times\mathbf{V} = 0$. Basta con demostrar que $\rho\left[(1/2)\nabla(\|\mathbf{V}\|^2)\right] = -\nabla p$. Elegimos $p = -(\rho/2)\|\mathbf{V}\|^2$.

5. Comenzamos con la ley de Ampere: $\nabla\times\mathbf{H} - \partial\mathbf{E}/\partial t = \mathbf{J}$. Tomamos divergencia en ambos lados: $\operatorname{div}\mathbf{J} = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) - \nabla\cdot(\partial/\partial t)\mathbf{E} = 0 - (\partial/\partial t)(\nabla\cdot\mathbf{E})$ (el cambio de orden de dos derivadas está justificado porque ∇ sólo toma derivadas de variables espaciales). Ahora, por la ley de Gauss, $\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho$. Si combinamos los dos resultados obtenemos $\operatorname{div}\mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t$, o $\operatorname{div}\mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$, que es la ecuación de continuidad.

6. (a) Según el ejercicio 12 de la página 552, necesitamos demostrar que

(1) $$\tilde{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \tilde{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \quad \text{y}$$

(2) $$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Definimos $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ y $\mathbf{r}' = R(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$. Para demostrar (1), $\tilde{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - G(\mathbf{y}, R(\mathbf{x})) = -1/4\pi\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| + 1/4\pi\|\mathbf{y}-R(\mathbf{x})\|$. Es evidente que $\|\mathbf{r}\| = \|-\mathbf{r}\|$, de donde $\tilde{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Para demostrar (2), sabemos que $\nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{r}/4\pi r^3$. Así, $\nabla G(R(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = \mathbf{r}'/4\pi(r')^3$. Entonces $\nabla^2 \tilde{G} = -\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \delta(R(\mathbf{x}), \mathbf{y})$, y

$$\int_{\mathbf{R}^3} \nabla^2 \tilde{G}\, d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{R}^3} [\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \delta(R(\mathbf{x}), \mathbf{y})]\, d\mathbf{y}.$$

Si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, entonces $R(\mathbf{x}) \neq \mathbf{y}$, y la integral anterior es

$$\int_{\mathbf{R}^3} \nabla^2 \tilde{G}\, d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{R}^3} \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = 1;$$

Si $R(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, entonces $\mathbf{x} \neq y$. Hacemos un cambio de variable: sea $u = x$, $v = y$, $w = -z$, así $dy = dx\, dy\, dz = -du\, dv\, dw$. Ahora la integral es

$$\int_{\mathbf{R}^3} \nabla^2 \tilde{G}\, d\mathbf{y} = -\int_{\mathbf{R}^3} \delta(R(\mathbf{x}), \mathbf{y})\, d\mathbf{y} = -\int_{\mathbf{R}^3} \delta(R(\mathbf{x}), \mathbf{u})(-d\mathbf{u})$$
$$= \int_{\mathbf{R}^3} \delta(R(\mathbf{x}), \mathbf{u})\, d\mathbf{u} = 1,$$

donde $\mathbf{u} = (u, v, w)$.

(b) Sólo "insertamos" nuestra función de Green en la integral:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^3} \tilde{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{R}^3} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y}) - G(R(\mathbf{x}), \mathbf{y})\rho(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}.$$

8. (a) Usamos la regla de la cadena: $u_t + u_{xx} = u_t\dot{t} + u_x\dot{x} = \dot{u} = 0$.

(b) Usamos $dt/ds = 1$ y $dx/ds = u$. La pendiente es igual a

$$\frac{t(s)}{x(s)} = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{u}.$$

De la parte (a) se deduce que u es una constante, entonces $1/u$ también es una constante. Por lo tanto, las curvas características son líneas rectas.

(c) Dos curvas características que pasen por $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ tienen ecuaciones $t = [1/u_0(x_1)](x - x_1)$ y $t = [1/u_0(x_2)](x - x_2)$, respectivamente. La intersección es

$$[1/u_0(x_1)](x - x_1) = [1/u_0(x_2)](x - x_2).$$

Simplificamos y obtenemos

$$x(1/u_0(x_1) - 1/u_0(x_2)) = x_1/u_0(x_1) - x_2/u_0(x_2).$$

Despejamos x:

$$x = \frac{\dfrac{x_1}{u_0(x_1)} - \dfrac{x_2}{u_0(x_2)}}{\dfrac{1}{u_0(x_1)} - \dfrac{1}{u_0(x_2)}} = \frac{x_1 u_0(x_2) - x_2 u_0(x_1)}{u_0(x_2) - u_0(x_1)} > 0.$$

(d) Por sustitución

$$\bar{t} = \frac{1}{u_0(x_1)} \left(\frac{x_1 u_0(x_2) - x_2 u_0(x_1)}{u_0(x_2) - u_0(x_1)} - x_1 \right) = -\frac{x_2 + x_1}{u_0(x_2) - u_0(x_1)}.$$

16. (a) Por definición, el vector de Poynting es

$$\int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot dS.$$

Por el teorema de Gauss, podemos replantear el lado derecho en la forma

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV.$$

Podemos aplicar al integrando la propiedad del triple producto de vectores (véase el capítulo 1):

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = -\int_V \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) dV.$$

Por último, la ley de Ampere da, para un campo electrostático,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

Combinamos todo y obtenemos

$$\int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, dV.$$

8.6 Formas diferenciales

OBJETIVOS

1. Saber sumar y aplicar producto exterior de k-formas.

2. Poder integrar y diferenciar k-formas.

3. Poder enunciar los teoremas de Green, Gauss y Stokes en términos de k-formas.

RECOMENDACIONES PARA EL ESTUDIO

1. *Notación.* En este libro, ω se usa para las 1-formas, η para las 2-formas y ν para las 3-formas.
2. *Definiciones.* (a) Las 0-formas son funciones escalares.
   (b) Las 1-formas contienen dx, dy o dz.
   (c) Las 2-formas contienen $dx\,dy$, $dy\,dz$ o $dz\,dx$ en el orden especificado.
   (d) Las 3-formas contienen la expresión $dx\,dy\,dz$.
   Estas definiciones difieren levemente en dimensiones superiores.

3. *Suma.* Sólo podemos sumar una k-forma con una l-forma si $k = l$.

4. *Integración.* Las 1-formas se integran como las integrales de línea.
   (b) Las 2-formas se integran como las integrales de superficie. Observa que cada término de la integral doble de la ecuación (2) contiene un jacobiano. Las variables del "numerador" del jacobiano siguen el ciclo natural de las diferenciales.
   (c) Las 3-formas se integran como las integrales triples ordinarias.

5. *Producto exterior.* Formas de diferentes tipos se pueden multiplicar. En nuestro caso, sólo podemos multiplicar una k-forma con una l-forma si $0 \leq k + l \leq 3$. Ten presente que $\omega \wedge \mu = (-1)^{kl}(\mu \wedge \omega)$. Esta propiedad se llama anticonmutatividad. Observa que $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$. Las demás propiedades son similares a las de la multiplicación de números reales.

6. *Diferenciación.* Si f es una 0-forma, df es como la derivada ordinaria. La regla de la "suma" (linealidad) es igual que en el cálculo de una variable. La regla del "producto" difiere ligeramente y $d(d\omega) = 0$; esta última igualdad incluye dos identidades $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ y $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ en una fórmula.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

1. (d) Como tenemos el producto exterior de una 2-forma con una 1-forma, el producto es una (2 + 1)-forma. Por la propiedad distributiva obtenemos

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \mu &= (xy\,dy\,dz + x^2dx\,dy) \wedge (dx + dz)\\
&= xy\,dy\,dz \wedge dx + x^2dx\,dy \wedge dx + dx\,dy\,dz \wedge dz + x^2dx\,dy \wedge dz\\
&= xy(dy\,dz \wedge dx) + x^2(dx\,dy \wedge dx) + xy(dy\,dz \wedge dz) + x^2(dx\,dy \wedge dz)\\
&= xy\,dx\,dy\,dz + x^2dx\,dy\,dz = (xy + x^2)dx\,dy\,dz.
\end{aligned}$$

Usamos la propiedad de anticonmutatividad: $dy\,dz \wedge dx = (-1)^2(dx \wedge dy\,dz)$. También usamos la propiedad asocitiva junto con las identidades $dx \wedge dx = dz \wedge dz = 0$.

3. (b) Cuando derivamos esta 1-forma debemos obtener una 2-forma

$$
\begin{aligned}
d\omega &= [d(y^2 \cos x) \wedge dy + (-1)^0 (y^2 \cos x) \wedge d(dy)] \\
&\quad + [d(xy) \wedge dx + (-1)^0 (xy) \wedge d(dx)] + d(dz) \\
&= [(-y^2 \operatorname{sen} x\, dx + 2y \cos x\, dy) \wedge dy + 0] + [(y\, dx + x\, dy) \wedge dx + 0] + 0 \\
&= -y^2 \operatorname{sen} x\, dx\, dy - x\, dx\, dy = (-y^2 \operatorname{sen} x - x) dx\, dy,
\end{aligned}
$$

ya que $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ y $dy \wedge dx = -dx\, dy$.

(e) Si derivamos esta 2-forma, debemos obtener una 3-forma

$$
\begin{aligned}
d\omega &= [d(x^2 + y^2) dy] \wedge dz + (-1)^1 (x^2 + y^2) dy \wedge d(dz) \\
&= [d(x^2 + y^2) \wedge dy + (-1)^0 (x^2 + y^2) \wedge d(dy)] \wedge dz + 0 \\
&= [(2x\, dx + 2y\, dy) \wedge dy] \wedge dz = [2x\, dx \wedge dy + 2y\, dy \wedge dy] \wedge dz \\
&= 2x\, dx\, dy\, dz
\end{aligned}
$$

ya que $d(dz) = d(dy) = dy \wedge dy = 0$.

4. Observa que $dx \wedge dx\, dy = dy \wedge dx\, dy = dy \wedge dy\, dz = dz \wedge dy\, dz = dz \wedge dz\, dx = dx \wedge dz\, dx = 0$. La derivada de $F\, dx\, dy$ es

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz\right] \wedge dx\, dy + (-1)^0 F \wedge d(dx\, dy) \\
&= \frac{\partial F}{\partial x} dx \wedge dx\, dy + \frac{\partial F}{\partial y} dy \wedge dx\, dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \wedge dx\, dy = \frac{\partial F}{\partial z} dz \wedge dx\, dy \\
&= \frac{\partial F}{\partial z} dz \wedge (dx \wedge dy) = \frac{\partial F}{\partial z} dz (dz \wedge dx) \wedge dy \\
&= -\frac{\partial F}{\partial z} dz (dx \wedge dz) \wedge dy = -\frac{\partial F}{\partial z} dx \wedge (dz \wedge dy) \\
&= \frac{\partial F}{\partial z} dx \wedge (dy \wedge dz) = \frac{\partial F}{\partial z} dx\, dy\, dz.
\end{aligned}
$$

De manera similar, la derivada de $G\, dy\, dz$ es $(\partial G/\partial x)\, dx\, dy\, dz$ y la derivada de $H\, dz\, dx$ es $(\partial H/\partial y)\, dx\, dy\, dz$. Por lo tanto,

$$
d\eta = \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = (\operatorname{div} \mathbf{V}) dx\, dy\, dz.
$$

8. Por un cálculo directo, observamos que ∂S es el círculo unitario en el plano xy. La parametrización es $(x, y, z) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial S} \omega &= \int_0^{2\pi} [(\cos t + \operatorname{sen} t)0 + (\operatorname{sen} t + 0)(-\operatorname{sen} t\, dt) + (\cos t + 0)(\cos t\, dt)] \\
&= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} \cos 2t\, dt = \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}
$$

Por el teorema de Stokes, los cálculos anteriores son iguales a $\int_S d\omega$. Calculemos $d\omega$: $d\omega = \left[d(x+y)\wedge dz+(x+y)\wedge d(dz)\right] + \left[d(y+z)\wedge dx+(y+z)\wedge d(dx)\right] + \left[d(x+z)\wedge dy+(x+z)\wedge d(dy)\right] = \left[(dx+dy)\wedge dz\right] + \left[(dy+dz)\wedge dx\right] + \left[(dx+dz)\wedge dy\right]$ porque $d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$. Esto se simplifica en $dx \wedge dz + dy \wedge dz + dy \wedge dx + dz\wedge dx + dx\wedge dy + dz\wedge dy = -dz\,dx + dy\,dz - dx\,dy + dz\,dx + dx\,dy - dy\,dz = 0$. Entonces tenemos $\int_S \omega = 0$, también.

11. Por el teorema de Stokes tenemos $\int_{\partial R} \omega = \int_R d\omega$. Veremos la cara derecha:

$$\begin{aligned}
d(x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy &= d\left[(x\,dy \wedge dz) + (y\,dz \wedge dx) + (z\,dx \wedge dy))\right] \\
&= \left[d(x\,dy) \wedge dz + (-1)^1(x\,dy \wedge d(dz))\right] \\
&\quad + \left[d(y\,dz) \wedge dx + (-1)^1(y\,dz \wedge d(dx))\right] \\
&\quad + \left[d(z\,dx) \wedge dy + (-1)^1(z\,dx \wedge d(dy))\right] \\
&= \left[dx \wedge dy + x \wedge d(dy)\right] \wedge dz \\
&\quad + \left[dy \wedge dz + y \wedge d(dz)\right] \wedge dx \\
&\quad + \left[dz \wedge dx + z \wedge d(dx)\right] \wedge dy.
\end{aligned}$$

Como $d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
&(dx \wedge dy) \wedge dz + (dy \wedge dz) \wedge dx + (dz \wedge dx) \wedge dy \\
&\quad = dx\,dy\,dz + dx \wedge (dy \wedge dz) + (-dx \wedge dz) \wedge dy \\
&\quad = dx\,dy\,dz + dx\,dy\,dz - dx \wedge (dz \wedge dy) \\
&\quad = 3\,dx\,dy\,dz.
\end{aligned}$$

Entonces, el lado derecho es $\int_R 3dx\,dy\,dz$. Identificamos $\int_R dx\,dy\,dz$ como el volumen de R. Si dividimos entre 3, obtenemos el resultado deseado.

8.R Ejercicios de repaso del capítulo 8

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

2. Por el teorema de Gauss, tenemos $\int_{\partial\Omega} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{H})dV = \int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{H})dV$, de modo que necesitamos demostrar que $\operatorname{div}\left[\mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G})\right] = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{G})$. Por la fórmula 9 de la tabla 3.1, sección 3.5, tenemos $\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$. Ahora, sea $\mathbf{A} = \mathbf{F}$ y $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{G}$. Esto nos da el resultado deseado, ya que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

7. (a) El método más sencillo para demostrar que $\mathbf{F}$ es conservativo es verificar que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 6xy(\cos z) & 3x^2(\cos z) & -3x^2y(\operatorname{sen} z) \end{vmatrix}$$

$$= (-3x^2 \operatorname{sen} z + 3x^2 \operatorname{sen} z, 6xy \operatorname{sen} z - 6xy \operatorname{sen} z, 6xy \cos z - 6xy \cos z)$$

$$= \mathbf{0}.$$

(b) Si $\mathbf{F}$ es el gradiente de alguna $f(x, y, z)$, entonces esta función debe satisfacer

$$6xy \cos z = \partial f/\partial x \qquad (1)$$

$$3x^2 \cos z = \partial f/\partial y \qquad (2)$$

$$-3x^2 \operatorname{sen} z = \partial f/\partial z \qquad (3)$$

Si integramos (3) con respecto a z, obtenemos $f(x, y, z) = 3x^2y \cos z + g(x, y)$. Si integramos (2) con respecto a y, obtenemos $f(x, y, z) = 3x^2y \cos z + h(x, z)$. Si integramos (1) con respecto a x, obtenemos $f(x, y, z) = 3x^2y \cos z + k(y, z)$. Si comparamos los tres resultados, vemos que $f(x, y, z) = 3x^2y \cos z + C$.

(c) Como $\mathbf{F}$ es un gradiente, sólo es necesario evaluar f en los puntos extremos para calcular la integral de línea. Entonces

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f\big(\boldsymbol{\sigma}(\pi/2)\big) - f\big(\boldsymbol{\sigma}(0)\big) = 3(\cos^3 \theta)^2(\operatorname{sen}^3 \theta)\Big|_0^{\pi/2} = 0.$$

9. Queremos calcular $\int_W \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$, donde W es el cubo unitario. Por el teorema de Gauss,

$$\int_W \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (6z + x^2 + y)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{3} + (6z + y)\right] dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + 6z + \frac{1}{2}\right) dz \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 3\right) = \frac{23}{6}.$$

13. (a) Calculamos $\nabla f = (\partial f/\partial x)\mathbf{i} + (\partial f/\partial y)\mathbf{j} + (\partial f/\partial z)\mathbf{k} = 3y \exp(z^2)\mathbf{i} + \exp(z^2)\mathbf{j} + 6xyz \exp(z^2)\mathbf{k}$.

(b) ∇f es un gradiente, por lo cual la integral es $f\big(\boldsymbol{\sigma}(\pi)\big) - f\big(\boldsymbol{\sigma}(0)\big)$. Como $f(x, y, z) = 3xy \exp(z^2)$, tenemos $f\big(\boldsymbol{\sigma}(t)\big) = 3(3 \cos^3 t)(\operatorname{sen}^2 t) \exp(e^{2t})$; entonces $f\big(\boldsymbol{\sigma}(\pi)\big) = 0$ y $f\big(\boldsymbol{\sigma}(0)\big) = 0$. Por lo tanto, $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \nabla f \cdot d\mathbf{s}$ es 0.

(c) Sea A la región cuya frontera es $\boldsymbol{\sigma}(t)$. Entonces, por el teorema de Stokes, $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \int_A [\nabla \times (\nabla f)] \cdot d\mathbf{S}$. Ésta siempre es cero porque el rotacional de un gradiente siempre es 0; la otra parte del teorema de Stokes se ilustró en el inciso (b).

14. Por el teorema de Green, $\int_C x^3 dy - y^3 dx = \int\int_D (3x^2 + 3y^2) dx\, dy$, donde D es el disco unitario. Ahora usamos coordenadas polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Podemos describir el disco unitario mediante $0 \le r \le 1$ y $0 \le \theta \le 2\pi$. Como el jacobiano es r, la integral se transforma en:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2 \cdot r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^1 3r^3 dr = 2\pi \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\pi.$$

17. Por el teorema de Green,

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int\int_D dx\, dy = \frac{1}{2}\int_C (x\, dy - y\, dx)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (a\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)(2a\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta) d\theta\\
&\qquad - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (a\,\mathrm{sen}^2\theta)\left[a(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta\right) d\theta\\
&= \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi} (2\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta + \mathrm{sen}^4\theta) d\theta\\
&= \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2\theta(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2\theta\, d\theta\\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) d\theta\\
&= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi a^2}{4}.
\end{aligned}$$

20. (c) Si $\mathbf{F}$ es un gradiente, entonces $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Calculamos

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 2xy^3 & x^2z^3 & 3x^2yz^2 \end{vmatrix} = -6xyz^2\mathbf{j} + (2xz^3 - 6xy^2)\mathbf{k}.$$

Excepto en el origen, $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ es diferente de $\mathbf{0}$, por lo tanto $\mathbf{F}$ no es un gradiente.

CAPÍTULO 9
EJEMPLOS DE EXÁMENES

9.1 Examen de comprensión para los capítulos 1 a 4

1. (a) Encontrar los extremos relativos de $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 1$.
   (b) Encontrar para la misma f los extremos relativos sobre la curva $x^2 + y^2 = 1$.

2. (a) Fido se encuentra en una extraña montaña descrita por la ecuación $M(x, y, z) = e^{-x}xy \operatorname{sen} z$. Si Fido está en el punto $(1, 1, \pi/2)$, ¿que dirección debe tomar para bajar la montaña de la manera más rápida posible?
   (b) Fido debe seguir cierta ruta de troncos de árbol (que fue marcada previamente) a lo largo de $\mathbf{c}(t) = (2t, t^2, 1)$. ¿A qué ritmo cambia la altura de Fido en $t = 1$?

3. (a) Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$, mediante conjeturas, halla una expresión para una línea de flujo $\boldsymbol{\sigma}(t)$ para $\mathbf{F}$.
   (b) Haz lo mismo para $\mathbf{F}(x, y) = (2x, -y)$.

4. (a) Encuentra la longitud de arco de $\boldsymbol{\sigma}(t) = (2t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.
   (b) Encuentra la longitud de arco de $\boldsymbol{\sigma}(t) = (2 \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$.
   (c) Explica las respuestas.

5. Debemos hacer una caja con madera por valor de \$120.00. La tapa se debe fabricar con madera que cuesta \$2.00 la pulgada cuadrada, y el resto de la caja se debe hacer con madera que cuesta \$2.50 la pulgada cuadrada. ¿Qué dimensiones tiene la caja más grande que podemos hacer en esas condiciones?

6. (a) Encuentra una ecuación de la recta de intersección de los planos $3x+2y-z = 7$ y $x - 4y + 2z = 0$.
   (b) Encuentra la ecuación del plano que contiene a los puntos $(1, 3, -2)$ y $(0, -2, 1)$ y es perpendicular al plano $3x - y - 2z = 5$.

7. Sea $f: B \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definida por $(u, v) \to (uv^2, v^3 - u, v \operatorname{sen} u)$ y $g: B \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definida por $(x, y, z) \to (yze^x, y^3 \cos xz)$.
   (a) Calcula $\mathbf{D}(f \circ g)(0, 1, 0)$.
   (b) Calcula $\mathbf{D}(g \circ f)(0, 1)$.

8. Un fabricante de acuarios anunció que sus tanques tienen una capacidad exacta de 0.49 m^3. Debido a un error de producción, el tanque tiene las dimensiones 1.01 m $\times$ 0.72 m $\times$ 0.67 m en lugar de las especificadas 1.00 m $\times$ 0.70 m $\times$ 0.70 m. Usa la aproximación lineal para estimar el error entre la capacidad anunciada y la real.

9. Un joven estudiante de bioingeniería, que es ornitólogo aficionado, quiere volar hacia el sur en las vacaciones de navidad, pero no puede afrontar el costo del boleto de avión. Ha sabido que sus golondrinas también quieren volar hacia el sur para el invierno, de modo que su plan ha sido atar un planeador a sus emplumadas amigas y hacer que vuelen hacia su hogar. Sus bien entrenadas golondrinas tenían un vector velocidad de $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (km/h) hasta que alcanzaron su altitud de crucero en $(0, 0, 1/2)$. En este punto continuan sobre la misma trayectoria, pero sin cambio de altitud. (Supón que la tierra es plana.)
   (a) ¿Cuál fue el punto original de partida en $(x, y, 0)$?
   (b) ¿Cuánto tiempo tardaron en alcanzar la altitud de crucero?
   (c) Cuándo alcanzaron $(0, 0, 1/2)$, un fuerte viento con velocidad $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ afectó el plan de vuelo. ¿Cuál fue el vector velocidad de las golondrinas para mantener una velocidad total de $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$?
   (d) Después de 3 horas, el bioingeniero calcula que pasarán sobre la casa de su peor enemigo, donde algunas de sus mascotas dejarán caer un saludo de 21 salvas de pájaro. ¿Cuál es la ubicación de la casa del enemigo?
   (e) Suponiendo que las golondrinas no pudieron compensar la fuerza del viento, ¿a qué distancia del objetivo estarían después de 3 horas?

10. Tighwad Terry, el avaro, realizó un análisis con computador de su capacidad de ingresos. Determinó que su función de ingresos es $\$(t, u, v, w) = t^2e^u + v \operatorname{sen} w$
   (a) Calcula $\$_t$, $\$_u$, $\$_v$, $\$_w$.
   (b) Suponiendo que Tightwad Terry quiere aumentar sus ingresos tan rápido como sea posible y estando en $(1, 0, 2, 0)$ de la gráfica de $\$$, ¿cómo debería cambiar t, u, v y w?
   (c) Si tiene exactamente una unidad de cada recurso (representados por t, u, v y w), ¿cuál es el aumento de ingresos más grande que puede esperar? Observa que puede usar cantidades fraccionarias de recursos, tales como $1/2$ de t y $1/2$ de w.

9.2 Examen de comprensión para los capítulos 5 a 8

1. (a) Evalúa

$$\int\int_D 3(x + y)e^{(x-y)}\, dx\, dy$$

sobre una región acotada por las rectas $x + y = 1$, $x + y = -1$, $x - y = 1$ y $x - y = -1$.

(b) Evalúa

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen} y^2 \, dy \, dx$$

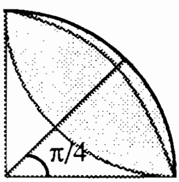
2. Un bloque tiene una tapa inclinada descrita por $x + y + z = 2$. Sus aristas son perpendiculares al plano xy, y el piso del bloque está formado por el triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$ y $(0, 1, 0)$. ¿Cuál es el volúmen del bloque?

3. Encuentra la masa de una pared descrita por $0 \leq y \leq -x^2 - 2x + 3$, $-3 \leq x \leq 3$, que tiene una densidad de $\rho(x, y) = 2|y| + 3$.

4. Sea $\mathbf{F}(x, y) = (e^x \cos 3y, -3e^x \operatorname{sen} 3y)$.
   (a) Encuentra una $f(x, y)$ tal que $\nabla f = \mathbf{F}$ para toda (x, y).
   (b) Evalúa $\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ para la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
   (c) Calcula $\nabla \times \mathbf{F}$.
   (Debes poder hacer las partes (b) y (c) mentalmente.)

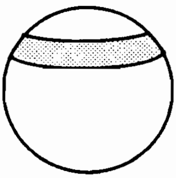
5. (a) Cierta solución de azúcar se hace pasar a través de una superficie membranosa descrita por $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ a una velocidad $2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. ¿Qué cantidad de la solución fluye a través de la membrana por unidad de tiempo?
   (b) Una partícula se mueve en una trayectoria $\boldsymbol{\sigma}(t) = (2t, 3t, t)$ en un campo de fuerza $\mathbf{F} = (2x, 2y, 4z)$. ¿Cuál es el trabajo realizado en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 5$?

6. (a)



Una lente de contacto se puede describir como una capa de esfera de radio R cortada en un cono de ángulo $\pi/4$. Encuentra el área de la superficie de la lente. (Sugerencia: ubica la lente en un sistema de coordenadas correcto y adecuado.)

   (b)



Rebanamos una esfera en cualquier parte con dos planos paralelos separados por una distancia fija d. Las bandas obtenidas siempre tienen la misma área de superficie. Demuestra esto. ¿Cuál es el área? (Sugerencia: usa coordenadas esféricas. ¿Cuánto vale Δz?)

7. (a) Encuentra el volumen encerrado por la superficie

$$x^2 + 9y^2 + z^2 - 2x + 54y - 10z + 106 = 0.$$

   (b) Encuentra una expresión para el área de la superficie anterior.

8. ¿Cuáles de los vectores siguientes son conservativos?

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + 1/x, \ln(y+1), z)$

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{-3x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \dfrac{-3y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \dfrac{-3z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$

(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (3yz, 2xz, 5xy)$

9. Completa las afirmaciones siguientes: un campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo si ____.

   (i) existe un campo vectorial $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \text{rot}\,\mathbf{G}$.

   (ii) existe una función escalar tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

   (iii) $\div \mathbf{F} = 0$.

   (a) sólo (i) (b) (i) y (ii) (c) sólo (ii) (d) (ii) y (iii).

10. Considera los argumentos siguientes: dado un campo vectorial $\mathbf{F}$,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \qquad \text{(por el teorema de Stokes)}$$

pero

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) dV = \int_{S=\partial V} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \qquad \text{(por el teorema de Gauss)}$$

por lo tanto, todo es 0 porque la divergencia del rotacional de cualquier campo vectorial es 0. ¿Qué es incorrecto?

9.3 Examen de comprensión A para los capítulos 1 a 8

1. Si es verdadero, demuéstralo. Si es falso, explica por qué.

   (a) La integral de trayectoria $\int_{\boldsymbol{\sigma}} 2\pi ds$ es el área de la superficie de un cilindro de radio 1 y altura 2π si $\boldsymbol{\sigma} = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

   (b) Una función suave $f(x, y)$ con al menos dos puntos críticos debe tener máximo y mínimo relativos.

   (c) La integral de línea de una función de densidad de masa a lo largo de una curva es la masa de la curva.

   (d) $\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$.

   (e) $\partial^2 f/\partial x \partial z = \partial^2 f/\partial z \partial x$ para todas las funciones continuas $f(x, y, z)$.

2. Elección múltiple. Elige al respuesta correcta.

   (1) ¿Qué par de vectores tiene el menor ángulo entre ellos?

   (a) $\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

   (b) $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, -2\mathbf{j}$

   (c) $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

   (d) La información es insuficiente.

(2) El teorema de Green requiere
   (i) primeras derivadas parciales continuas
   (ii) funciones continuas
   (iii) cualquier curva cerrada que sea la frontera de una región

   (a) sólo i (b) sólo ii (c) ii y iii (d) i y iii.

(3) Sea $f(x, y, z) = z^2 x e^x \cos(yz)$. Una partícula viaja siguiendo la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}$ desde $(0, -2/5, \pi/4)$ hasta $(3, 5, -\pi/2)$. Si la fuerza que actúa sobre la partícula es ∇f, entonces el trabajo realizado sobre la partícula es
   (a) negativo
   (b) cero
   (c) positivo
   (d) desconocido porque $\boldsymbol{\sigma}$ es desconocida

(4) Para cualquier par de vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) =$
   (i) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
   (ii) 0
   (iii) $(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$

   (a) sólo i (b) sólo ii (c) ii y ii (d) i, ii y iii.

3. Sea $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{k}$. Calcula $\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para las superficies S siguientes:
   (a) $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 1, z \geq 3$
   (b) $9x^2 + 9y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$

4. Considera el sistema

$$F_1(u, v, x, y) = u^2 - v^2 + 2x + xy$$

$$F_2(u, v, x, y) = 2u + 3v - 5x^2$$

   (a) Demuestra que no se puede despejar u y v en términos de x y y en $(u, v) = (0, 0)$.
   (b) Demuestra que $\partial u/\partial x$ existe en $(u, v, x, y) = (3, 2, -1, 0)$. Calcúlalo.

5. Supón que $g(u, v) = (uv^2, u + 2v, v)$. En $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, $(u, v) = (1, 2)$ y

$$\mathbf{D}f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

   Sea $h = g \circ f$. ¿Cuánto vale $\mathbf{D}h(0, 0, 0)$?

6. Una superficie está parametrizada por

$$x = u^2, \quad y = v^2 \quad z = uv, \qquad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2.$$

   (a) Encuentra el plano tangente en $(u, v) = (1, 1)$ como función de x y y.

(b) Cuando $u = 1$, encuentra la longitud de arco de la curva en el espacio para $0 \leq v \leq 2$.

7. Sea Φ la superficie parametrizada por

$$x = e^u \cos v, \quad y = e^u \operatorname{sen} v \quad z = v, \qquad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq \pi/2.$$

(a) Encuentra el área de la superficie Φ.
(b) Calcula el valor promedio de z en Φ.

8. Sea $f(x, y) = x^2 - 3x + y - y^2 + 5$.
(a) Expresa $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en coordenadas esféricas en todos los puntos donde (x_0, y_0) sea un punto crítico.
(b) Encuentra los extremos de f en el círculo $x^2 + y^2 = 5/2$.

9. Una superficie está descrita por la ecuación $z = 2y + \cos \pi x - \sqrt{x}$. Considera el punto $(4, -1, 1)$
(a) Encuentra la derivada direccional en la dirección de $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.
(b) Encuentra la ecuación del plano tangente.

10. Una región en el espacio está entre las gráficas de $z = 16 + x^2 + y^2$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. La región también está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
(a) Expresa el volumen de la región como integral triple con coordenadas cartesianas.
(b) Vuelve a escribir la respuesta usando coordenadas cilíndricas.
(c) Encuentra el volumen de la región.

9.4 Examen de comprensión B para los capítulos 1 a 8

1. Interpretaciones físicas y geométricas.
(a) ¿Qué sabemos sobre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$?
(b) ¿Qué sabemos sobre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$?
(c) ¿Qué interpretación física está asociada con una divergencia negativa?
(d) Da una interpretación física del rot $\mathbf{V}$.

2. Considera el punto $(1, 1, 1, 1)$ de la función $f(x, y, z, t) = x^2 y + zt - z$.
(a) Calcula la derivada direccional en la dirección de $(2, 0, 6, 4)$.
(b) ¿En qué dirección crece f más rápido, en la dirección de $(2, 0, 6, 4)$ o en la dirección de $(1, 1, 2, 1)$? Explica la respuesta.

3. (a) El plano $x + y + z = 1$ corta al cilindro $x^2 + y^2 = 4$ en una curva. Demuestra que la longitud de arco de esta curva es

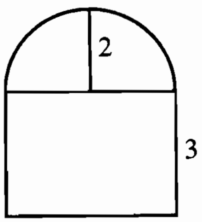
$$\sqrt{8} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\theta \operatorname{sen}\theta}\, d\theta.$$

(b) Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva de la parte anterior en el punto $(1, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

4. Encuentra el máximo y el mínimo de $x + yz$ sujeto a las restricciones $x + z = 2y$ y $\{(x, y) | (x, y) \in [3, 5] \times [0, 2]\}$.

5. Sea S la frontera de la caja $B = [-2, 2] \times [-1, 1] \times [-3, 3]$, $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$ y $\mathbf{G} = x^3\mathbf{i} + 3z\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$.
   (a) Calcula la integral de $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre B.
   (b) Calcula $\int_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}$.
   (c) Supón que el origen en el centro de B se desplaza a $(8 - 15, 20)$ y luego se aplica una rotación de 30° alrededor del eje y. Calcula $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

6. Se taladra un hoyo de radio $1/2$ a través del eje de simetría de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.
   (a) Plantea el volumen de la parte que queda en coordenadas cartesianas.
   (b) Plantea el volumen de la parte que queda en coordenadas cilíndricas.
   (c) Calcula el volumen.

7. 

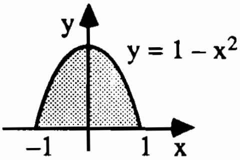
Un pintor teme a las alturas, por este motivo cobra una cantidad adicional de z^2 dólares por metro cuadrado por pintar objetos localizados a una altura z. Su último trabajo es pintar el silo S que se muestra en la figura. La altura de la parte cilíndrica es 3 metros y el radio de la parte esférica es 2 metros.
   (a) Calcula $\int_S dS$ e interpreta geométricamente.
   (b) Calcula qué cantidad adicional cobra el pintor.

8. (a) Calcula $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \cos(y^3 + 3)dy\,dx$.
   (b) Calcula $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2+z^2)}dx\,dy\,dz$.

9. (a) Verifica el teorema de Stokes para $\mathbf{F} = z^3\mathbf{i} + (x^3 - y^3) + y^3\mathbf{k}$ sobre el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.
   (b) Para la misma $\mathbf{F}$ que en (a), evalúa $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ para la superficie $x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$ $z \leq 0$.

10. (a) Encuentra una función de valores vectoriales $f(x, y, z)$ tales que

$$\mathbf{D}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} -yz\,\text{sen}(xy)e^{\cos(xy)} & -xz\,\text{sen}(xy)e^{\cos(xy)} & e^{\cos(xy)} \\ y^2\,\text{sen}\,z & 2xy\,\text{sen}\,z & xy^2\cos z \end{bmatrix}$$

(b) 

Para la región D que se muestra en la figura, sea V el volumen del sólido que está entre $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y$ y el plano xy y que está sobre D. Plantea V en la forma $\iiint g(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$.

(c) Plantea la respuesta de la parte (b) en la forma $\iiint g(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$.

APÉNDICE
RESPUESTAS A LOS EJEMPLOS DE EXÁMENES

A.1 Respuestas al examen de comprensión de los capítulos 1 a 4

1. (a) $(0, 1)$ es un mínimo
   (b) $(1, 0), (-1, 0)$

2. (a) $e^{-\pi/2}(-1, -1, 1)$
   (b) $6e^{-1}$ sen 1

3. (a) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$
   (b) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\exp(2t), \exp(-t))$

4. (a) $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$
   (b) $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$
   (c) En realidad, las dos parametrizaciones trazan la misma trayectoria

5. $32\sqrt{5/3}$ pulgadas cúbicas

6. (a) $(2, 1, 1) + t(0, 1, 2)$
   (b) $13x + 7y + 16z = 2$

7. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$

8. 0.0021 m^3

9. (a) $(-3/2, -2)$ (b) $1/2$ hora
   (c) $\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ (d) $(15/2, 10, 0)$
   (e) $5\sqrt{5}/2km$

10. (a) $\$_t = 2te^u$, $\$_u = t^2e^u$, $\$_v = \operatorname{sen} w$, $\$_w = v \cos w$
    (b) Va en dirección de $(2, 1, 0, 2)$
    (c) $(2e^{1/3}/3, 4e^{1/3}/9, 0, 0)$

A.2 Respuestas al examen de comprensión de los capítulos 5 a 8

1. (a) 0 (b) $(1 - \cos 1)/2$

2. 5/3

3. $1848/5$

4. (a) $f(x, y) = e^x \cos 3y + C$
   (b) 0 (c) **0**

5. (a) $-16\pi/3\sqrt{2}$ (b) 375

6. (a) $2\pi R^2(1 - \sqrt{2}/2)$
   (b) El área es $2\pi R^2 d$

7. (a) $4\pi/9$
   (b) $\displaystyle \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi\sqrt{1 + 8\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta}\,d\varphi\,d\theta$

8. (a) y (c)

9. (c)

10. En el teorema de Stokes, la superficie no debe ser cerrada (por tanto, deberá tener una frontera real), mientras que en el teorema de Gauss, la superficie tiene que ser cerrada (encerrar a un volumen).

A.3 Respuestas al examen de comprensión de los capítulos 1 a 8

1. (a) Falso. El área de superficie de dicho cilindro es 2π, mientras que el valor de la integral es $2\sqrt{2}\pi$.
   (b) Falso. Por ejemplo, ambos puntos pueden ser silla.
   (c) Verdadero.
   (d) Falso. El rotacional es un producto cruz, no un producto punto.
   (e) Falso. También necesitamos que las primeras derivadas parciales sean continuamente diferenciales.

2. (1)(c) (2)(d) (3)(d) (4)(d)

3. (a) 0 (b) 0

4. (a) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$
   (b) $\partial u/\partial x = -2$

5. $\begin{bmatrix} 12 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

6. (a) x+y-2z=0
   (b) $(1/2)[4\sqrt{17} + \log(4 + \sqrt{17})]$

7. (a) $(\sqrt{2}/2)\pi(e - 1)$ (b) $1/2$

8. (a) $(\sqrt{46}/2, \tan^{-1}(1/3), \cos^{-1}(6/\sqrt{46}))$
   (b) $(3/2, 1/2), (-9/10, 13/10),$

9. (a) 15/4 (b) $x - 8y + 4z = 16$

10. (a) $4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2-x^2}} 16 + x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$
    (b) $2\pi \int_0^2 \int_0^r r\, dz\, dr + 2\pi \int_2^{16} \int_0^2 r\, dr\, dz + 2\pi \int_0^4 \int_0^{r^2} r\, dz\, dr$
    (c) $496\pi/3$

A.4 Respuestas al examen de comprensión de los capítulos 1 a 8

1. (a) Los dos vectores son ortogonales, o ninguno de ellos es **0**.
   (b) Los dos vectores son paralelos, o uno de ellos es **0**.
   (c) Hay más material que va adentro que afuera, es decir, tenemos un sumidero.
   (d) El rotacional $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ describe la trayectoria de **V** en la superficie con normal **n**.

2. (a) 8
   (b) En la dirección de (1, 1, 2, 1) porque la derivada direccional utiliza una cantidad mayor de vectores normalizados en el segundo caso.

3. (a) La curva que es intersección de las superficies se debe parametrizar mediante

$$(x, y, z) = (2\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\theta, 1 - 2\cos\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

   (b) $(x, y, z) = (1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}) + t(-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3} - 1)$

4. Máximo=6, mínimo=3

5. (a) 96 (b) 192
   (c) 96

6. (a) $4\int_{1/2}^{1}\int_{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$
   (b) $\int_0^{2\pi}\int_0^{1/2}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$
   (c) $\dfrac{\pi}{3}\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3/2}\right)$

7. (a) 16π, que es el área de superficie del techo.
   (b) $(500\pi/3)$ dólares.

8. (a) $[\operatorname{sen}(4)-\operatorname{sen}(3)]/2$
   (b) π

9. (a) $3\pi/4$ (b) $-3\pi/4$

10. (a) $f(x, y, z) = (ze^{\cos(xy)}, xy^2 \operatorname{sen} z)$
    (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^{-x^2+1}\int_0^{x^3 \operatorname{sen} y} dz\,dy\,dx$
    (c) $\displaystyle\int_0^{1}\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}\int_0^{x^3 \operatorname{sen} y} dz\,dx\,dy$